

Faustino Vizcarra Parra
Rolando Alberto Forneiro Rodríguez
Victoria Bárbara Arencibia Sosa
Armando Flórez Arco

Pensamiento Matemático

I



PENSAMIENTO MATEMÁTICO I

Faustino Vizcarra Parra
Rolando Alberto Fomeiro Rodríguez
Victoria Bárbara Arencibia Sosa
Armando Florez Arco

Primera edición, junio de 2024

Universidad Autónoma de Sinaloa
Dirección General de Escuelas Preparatorias
Ciudad Universitaria, Circuito Interior Ote. S/N, C.P. 80013
Teléfono: 667 712 1653, Culiacán, Sinaloa, México

D.R. © Servicios Editoriales Once Ríos, S.A. de C.V.
Luis González Obregón S/N, C.P. 80135, Nuevo Bachigualato,
Teléfono: 667 712 2950, Culiacán, Sinaloa, México

Diseño editorial: Servicios Editoriales Once Ríos, S.A. DE C.V.
Diseño de portada: Irán Ubaldo Sepúlveda León
Fotografía de la portada: Flavio Córdova

Número de Registro: 03-2024-040110054900-01
ISBN: 978-607-9432-63-8

Prohibida la reproducción total o parcial de la obra por cualquier medio o método
o en cualquier forma electrónica, mecánica, incluso fotocopia, o sistema para recuperar
información, sin la autorización previa y por escrito de los titulares del *copyright*.
Todos los derechos reservados.

Impreso en México
Printed in Mexico

Dedicatoria y agradecimientos

A nuestros queridos docentes

Con profundo agradecimiento y admiración dedicamos este libro a aquellas y aquellos profesores excepcionales que, con su pasión por la enseñanza y su compromiso inquebrantable, han guiado la creación de estas páginas. Su dedicación en el desarrollo del pensamiento probabilístico y estadístico ha iluminado el camino a otros docentes del Nivel Medio Superior (NMS) de la Universidad Autónoma de Sinaloa (UAS).

Sus enseñanzas han sido como faros de sabiduría, iluminando mentes, inspirando la curiosidad y fomentando el gusto por el aprendizaje. En este sentido, este libro es un testimonio de ese arduo trabajo y devoción, y esperamos que sea bien recibido para formar las nuevas generaciones de estudiantes. Así, su uso en el proceso de enseñanza y aprendizaje nos invita a seguir aprendiendo y creciendo como un equipo de docentes, que ven en la innovación la importancia de incorporar la inteligencia artificial (IA) como un aliado.

Tomemos en cuenta que la integración de la inteligencia artificial en el proceso de enseñanza y aprendizaje emerge como un catalizador fundamental para el desarrollo del pensamiento probabilístico y estadístico. Al aprovechar sus capacidades, la IA puede facilitar el acceso al conocimiento, personalizar el aprendizaje, optimizar los métodos pedagógicos y evaluar los resultados. Además, el estudiante la puede utilizar como un tutor en su proceso de aprendizaje. En definitiva, se reconoce el impacto de la IA como un aliado del docente en el proceso educativo.

En agradecimiento por sembrar las semillas para el desarrollo del pensamiento matemático en las y los estudiantes del NMS de la UAS, les extendemos nuestro más sincero agradecimiento. Que este libro sea un tributo a su legado en la formación de mentes brillantes y pensadores en el quehacer de las matemáticas.

Colaboradores:

Fernando Eleazar Acosta Cruz	Academia de Matemáticas (DGEP)
Paloma Sandoval Gámez	UAP C.U. Mochis
José Humberto Romero Fitch	
Christian Marcel López Nieblas	
Ramiro Amezcua Reyes	
Heriberto Carlos Ayala Cruz	
Clarissa López Aboyte	UAP Casa Blanca
Jorge Aldívar Contreras Espinoza	
Lorena Leal Montoya	
María Del Rosario Llanes Molinero	UAP Dr. Salvador Allende
Luis Felipe Flores Tirado	

Adán Meza Sánchez	UAP El Rosario
Jorge Ramos Martínez	UAP Escuinapa
Juana María Armenta Trasviña	UAP Guasave Diurna
Silvia Bojórquez Soto	
Reyna Jesús Trasviña López	
César Pilar Quintero Campos	UAP La Cruz
Martín Luna Belmar	
Abril Liseth Fierro Romero	UAP Los Mochis
Jesús Antonio García Duarte	
Yadira Esmeralda Gutiérrez Esquivel	
Adriana Gutiérrez García	
Edith Ivett Ocampo Manjarrez	
Paola Elifelet Reyes Álvarez	
Erick Eduardo Romero Gómez	
Zayto Baltazar Peñuelas Borbóa	UAP Los Mochis Extensión Macapule
Izeth Saraí Rivera Díaz	
Asia Cecilia Carrasco Valenzuela	UAP Rubén Jaramillo
Iliana Tirado Olivas	
Eva Edith Verdugo Serrano	UAP Ruiz Cortines
Alma Rosario Gámez Vázquez	
Daniela Castro Miranda	
Jorge Radney Montgomery Leyva	UAP Valle del Carrizo
Anarelli Corona Cárdenas	UAP Victoria del Pueblo
Fernando Tomás Gil Camacho	
Yoanna Marisol Mercado Lizarde	UAP Vladimir Ilich Lenin
María Esther Franco González	
Carmen Leonor Castro Millán	

Tabla de categorías, subcategorías, aprendizajes de trayectoria y metas de aprendizaje de Pensamiento Matemático I

Categorías			
C1 Procedural	C2 Procesos de intuición y razonamiento	C3 Solución de problemas y modelación	C4 Interacción y lenguaje matemático
Subcategorías			
S1 Elementos aritmético-algebraicos	S1 Capacidad para observar y conjeturar	S1 Uso de modelos	S1 Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico
S2 Elementos geométricos	S2 Pensamiento intuitivo	S2 Construcción de modelos	S2 Negociación de significados
S4 Manejo de datos e incertidumbre	S3 Pensamiento formal	S3 Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios	S3 Ambiente matemático de comunicación
Aprendizajes de Trayectoria			
Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.	Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).	Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.	Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.
Metas de Aprendizaje			
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	M1-C3 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	M2-C2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	M2-C3 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	M3-C2 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	M3-C3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	
	M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	M4-C3 Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	

Presentación

Es un placer presentarles este libro de Pensamiento Matemático I, que ha sido cuidadosamente diseñado para acompañar a las y los estudiantes de bachillerato en su fascinante travesía por el mundo de esa maravillosa forma matemática de pensar denominada pensamiento matemático, que proporciona una base sólida y estimulante para el aprendizaje.

Así, este libro es para utilizarse en la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) Pensamiento Matemático I, del Recurso Sociocognitivo Pensamiento Matemático, correspondiente al primer semestre del componente fundamental y extendido del Plan de estudios (UAS, 2024) del Currículo del bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa 2024 que, de acuerdo con el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MC-CEMS), establecido por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2023a), enfatiza el desarrollo del pensamiento matemático.

El pensamiento matemático, según el MCCEMS, se define como un Recurso Sociocognitivo que involucra diversas actividades cognitivas que van desde la ejecución de operaciones y el desarrollo de procedimientos y algoritmos hasta abarcar procesos mentales abstractos, incluida la intuición, que se dan cuando el sujeto participa del quehacer matemático al resolver problemas, usar o crear modelos, elaborar tanto conjeturas como argumentos y organizar, sustentar y comunicar sus ideas (SEP, 2023c, p.17).

La secuencia de esta obra, está basada en progresiones de aprendizaje, cada una diseñada para desarrollar, sobre la anterior, un pensamiento matemático; para el caso particular de esta UAC, un pensamiento probabilístico y estadístico.

En el sentido anterior, las progresiones de aprendizaje (PA) de la UAC *Pensamiento matemático I* desarrollan el pensamiento probabilístico y estadístico para el logro de las metas de aprendizaje en la siguiente secuencia:

- PA 1. La variabilidad en la toma de decisiones.
- PA 2. La incertidumbre como consecuencia de la variabilidad.
- PA 3. El cálculo de probabilidades y la hipótesis de equiprobabilidad.
- PA 4. La probabilidad y las técnicas de conteo.
- PA 5. La probabilidad condicionada.
- PA 6. Recolección de datos estadísticos.
- PA 7. Representación de la información.
- PA 8. La relación entre variables categóricas.
- PA 9. La relación entre variables cuantitativas.
- PA 10. Los valores atípicos y las variables de confusión en afirmaciones estadísticas y gráficas.
- PA 11. Estudio de una población a partir de una muestra.
- PA 12. Los estudios observacionales y el diseño de experimentos.
- PA 13. Las medidas estadísticas en el estudio de un fenómeno.
- PA 14. La distribución normal.
- PA 15. Inferencias estadísticas basadas en la distribución normal.

Bajo esta lógica del proceso de desarrollo del pensamiento matemático, las progresiones de aprendizaje están estructuradas y secuenciadas, en el sentido de que cada una es más compleja que la anterior, de acuerdo al nivel de pensamiento matemático que demande cada progresión. Cada una de ellas, se inicia con una situación contextualizada o evaluación diagnóstica; luego, le siguen ejemplos y actividades de aprendizaje diseñadas atendiendo a las subcategorías de las categorías del pensamiento matemático, mismas que orientan hacia el logro de las metas de aprendizaje; al final cuenta con instrumentos para la autoevaluación y coevaluación.

Además, en cada PA se consideran tres momentos claves de la evaluación: diagnóstica, formativa (mientras se aprende) y final; haciendo énfasis en la evaluación formativa en función de la retroalimentación, para que, durante el proceso de realizar las actividades de aprendizaje, las y los docentes puedan determinar el nivel de logro por los estudiantes, en particular, de las metas de aprendizaje que contribuyen a los aprendizajes de trayectoria. Es decir, se utiliza la evaluación formativa como herramienta para comprender su progreso y ajustar, en consecuencia, las estrategias activas.

También, durante el proceso de aprendizaje, en cada PA se lleva a cabo la autoevaluación (A), coevaluación (C) y heteroevaluación (H); para ello, se implementa como técnica principal de evaluación la observación, utilizando guías específicas para tal fin. Los resultados se reflejarán en la tabla que aparece al inicio de cada progresión en correspondencia con el desempeño.

Por otra parte, se sugiere usar los códigos QR (generados en parzibyte: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>), así como la Inteligencia Artificial y las aplicaciones de celular como aliados en este proceso de aprendizaje.

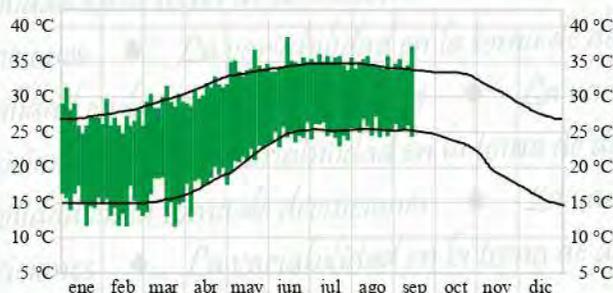
Finalmente, el desarrollar un pensamiento matemático no solo les abrirá las puertas en el aula, sino que también los acompañará a lo largo de sus vidas, dotándoles de la capacidad de enfrentar cualquier desafío con ingenio y perspicacia.

¡Adentrémonos juntos en el fascinante universo del
pensamiento matemático!

Contenido

Dedicatoria y agradecimientos	♦	5
Tabla de categorías, subcategorías, aprendizajes de trayectoria y metas de aprendizaje de Pensamiento Matemático I	♦	7
Presentación	♦	8
Progresión de aprendizaje 1. La variabilidad en la toma de decisiones	♦	11
Progresión de aprendizaje 2. La incertidumbre como consecuencia de la variabilidad	♦	18
Progresión de aprendizaje 3. El cálculo de probabilidades y la hipótesis de equiprobabilidad	♦	27
Progresión de aprendizaje 4. La probabilidad y las técnicas de conteo	♦	36
Progresión de aprendizaje 5. La probabilidad condicionada	♦	45
Progresión de aprendizaje 6. Recolección de datos estadísticos	♦	53
Progresión de aprendizaje 7. Representación de la información	♦	60
Progresión de aprendizaje 8. La relación entre variables categóricas	♦	72
Progresión de aprendizaje 9. La relación entre variables cuantitativas	♦	80
Progresión de aprendizaje 10. Los valores atípicos y las variables de confusión en afirmaciones estadísticas y gráficas	♦	90
Progresión de aprendizaje 11. Estudio de una población a partir de una muestra	♦	99
Progresión de aprendizaje 12. Los estudios observacionales y el diseño de experimentos	♦	108
Progresión de aprendizaje 13. Las medidas estadísticas en el estudio de un fenómeno	♦	117
Progresión de aprendizaje 14. La distribución normal	♦	129
Progresión de aprendizaje 15. Inferencias estadísticas basadas en la distribución normal	♦	138
Bibliografía consultada	♦	150
Bibliografía de consulta para el estudiante y el profesor	♦	150
Referencia a las fuentes de consulta de tablas	♦	150
Referencia a las fuentes de consulta de imágenes	♦	151
Referencia a las fuentes de consulta de los Códigos QR	♦	154
Anexos	♦	155

La variabilidad en la toma de decisiones



Progresión de aprendizaje 1

Discute la importancia de la toma razonada de decisiones, tanto a nivel personal como colectivo, utilizando ejemplos reales o ficticios y de problemáticas complejas que sean significativas para valorar la recolección de datos, su organización y la aleatoriedad.

Se busca llevar al estudiantado a que aprecie el poder de la matemática y el pensamiento estadístico y probabilístico. En este punto no se espera que se resuelvan las problemáticas abordadas.

Meta de aprendizaje	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A		
	C		
	H		

En la vida cotidiana se presentan fenómenos deterministas o fenómenos aleatorios. Los fenómenos deterministas son aquellos que, realizados en las mismas circunstancias, sólo tienen un resultado posible (siempre se tiene el mismo resultado), de forma que siempre tendremos la certeza de lo que va a suceder antes de que ocurra. Por ejemplo:

- Si metes una botella de agua al congelador, esta se va a congelar.
- Si lanzas una pelota hacia arriba, esta subirá durante un periodo de tiempo y luego caerá al suelo.

Respecto a los fenómenos aleatorios, estos dan lugar a varios resultados, sin que se pueda saber con certeza cuál de ellos va a ser observado antes de que ocurra el fenómeno (los resultados pueden variar), por ejemplo:

- Si lanzas un dado al aire, no sabes con exactitud qué número saldrá.
- Cuando juegas a la lotería, no sabes con precisión que carta será la ganadora.

En esta progresión de aprendizaje vas a estudiar la importancia de la toma de decisiones sobre un fenómeno aleatorio, basándote en datos organizados en tablas o gráficas.

Empieza con el estudio de la temperatura en Culiacán, un fenómeno que preocupa a sus habitantes por la insolación, golpe de calor y la deshidratación, siendo las personas mayores, los niños pequeños y los enfermos crónicos los más vulnerables. Además, de las pérdidas económicas que ocasionan las altas temperaturas en la aceleración de la descomposición de los alimentos como los mariscos crudos, que cuando los consumes pueden ocasionarte enfermedades gastrointestinales, por mencionar algunas.

Como ya sabes, la temperatura en el municipio de Culiacán es un tema de preocupación para la población, ya que cada temporada siente que esta se incrementa. Un caso curioso es el artículo presentado en El Debate de Culiacán, “*¡Alerta Culiacán! se esperan 47 grados de sensación térmica*”¹

Y en su contenido menciona lo siguiente:

Para este lunes la sensación térmica para el municipio de Culiacán se estima que ronde hasta en los 47 grados centígrados, ...

Luego, en el siguiente párrafo menciona que:

En cuanto a las temperaturas hoy llegarán a los 37 grados centígrados ...

¿A qué crees que se deba esto?

Actividad de aprendizaje 1.1

Establece la diferencia entre sensación térmica y temperatura del aire que nos rodea y coméntala ante el grupo para llegar a acuerdos sobre el significado de cada concepto. Sugerencia: usa la inteligencia artificial para obtener las definiciones.

1. Definición de sensación térmica: _____

2. Definición de temperatura: _____

3. Diferencias entre sensación térmica y temperatura.

Sensación térmica	Temperatura

Una vez aclarado el significado y diferencias entre sensación térmica y temperatura, a partir de tu experiencia, te has dado cuenta que la temperatura varía durante el día, así como de un día a otro. Esto conlleva a definir la temperatura como una variable debido a que presenta variaciones en el tiempo.

El concepto de variabilidad tiene un rol importante en la estadística por la gran cantidad de variables que intervienen en fenómenos y situaciones como el clima, el valor de las divisas, la violencia, las precipitaciones pluviales, la sequía, las inundaciones, el flujo de tráfico vehicular, entre otras. Estas variables tienen un comportamiento caótico e impredecible, por lo que su estudio implica buscar métodos que faciliten cuantificar la incertidumbre (la incertidumbre es una consecuencia de la variabilidad y se estudiará en la progresión de aprendizaje 2). Cuando cuentas con datos sobre las variaciones que se producen en determinados fenómenos, estos proporcionan información sobre el presente o el pasado, sin embargo, la incertidumbre se siente en relación a acontecimientos futuros.

¹ El Debate de Culiacán, 04/09/2023, <https://www.debate.com.mx/sinaloa/culiacan/Alerta-Culiacan-se-esperan-47-grados-de-sensacion-termica-20230904-0026.html>.

Como consecuencia de la imposibilidad de que conozcas con exactitud el comportamiento de fenómenos aleatorios, como fue el caso del huracán Otis que impactó a Acapulco el 25 de octubre de 2023, la alternativa que tienes es la predicción de lo que pueda ocurrir y, con base en ella, puedas tomar decisiones más acertadas para minimizar los daños.

Actividad de aprendizaje 1.2

Valora la importancia de contar con registros sobre la temperatura que facilitan su predicción y a partir de ello, la toma de decisiones.

1. Los habitantes de Culiacán, comentan que cada año en la temporada calurosa que comprende de mayo a octubre, sienten más calor con respecto a la temporada pasada. Con base en tu experiencia, plantea una conjetura (juicio que se forma de algo por indicios u observaciones) con respecto al incremento de la temperatura en Culiacán.
 - a) Conjetura: _____
 - b) Definición de variabilidad: _____

2. Con tu celular, en la aplicación del estado del clima, explora la temperatura pronosticada para los días de hoy y mañana.
 - a) En la Figura 1.1 observa la temperatura de una tarde en Culiacán, ¿cada tarde en Culiacán presentará la misma temperatura que hoy? _____ ¿Por qué? _____
 - b) ¿Qué factores influyen en la variación de la temperatura de un día a otro? _____
 - c) Para decidir si el próximo domingo será un día propicio para ir con la familia a la playa, ¿con base en qué sustentas la toma de dicha decisión? _____
 - d) ¿Es suficiente con conocer el comportamiento de la temperatura en unos cuantos días o semanas para comprobar la conjetura? _____ ¿Por qué? _____
 - e) ¿Qué información necesitas para probarla? _____



Figura 1.1. Datos de la temperatura de una tarde en Culiacán.
 Fuente: Aplicación del clima (Android, 2023)

El registro de la temperatura y de otros factores relacionados con esta, ayudaron a crear modelos para predecirla, así como también a realizar el pronóstico del tiempo. Esta información es relevante para la toma de decisiones, por ejemplo, en la Figura 1.2, cuando se pronostican lluvias intensas en Culiacán, Protección Civil hace un llamado a extremar precauciones debido a las inundaciones que pueden ocurrir en ciertas colonias. Dado que los fenómenos naturales son impredecibles, los modelos proporcionan una predicción de su comportamiento con cierto grado de error, sin embargo, hay decisiones que se toman con base en dicha predicción, priorizando el salvaguardar vidas humanas.

Figura 1.2. Aviso de suspensión y reanudación de clases en la UAS por recomendación de Protección Civil.
Fuente: Universidad Autónoma de Sinaloa.



Mediante los datos registrados de la temperatura en Culiacán se calculan intervalos de las temperaturas promedio máximas y mínimas de cada día del año. Estas se usan para organizar las temperaturas reales en forma gráfica, que visualmente es más fácil de interpretar que los datos simples. Además, facilita tener un registro histórico por año como lo muestran las Figuras 1.3, 1.4 y 1.5, para su contraste.

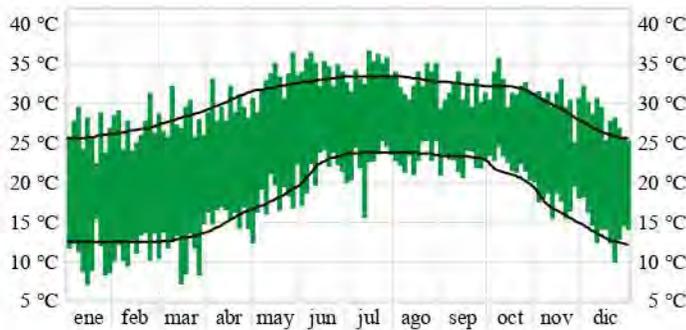


Figura 1.3. Datos históricos de temperatura en Culiacán en 2021.

Nota: El intervalo diario de temperaturas reportadas (barras azules), colocadas arriba del promedio diario de la máxima (línea negra superior) y de la mínima (línea negra inferior).

Fuente: Elaboración propia tomando como referencia la gráfica dada por © WeatherSpark.com, para uso educativo.

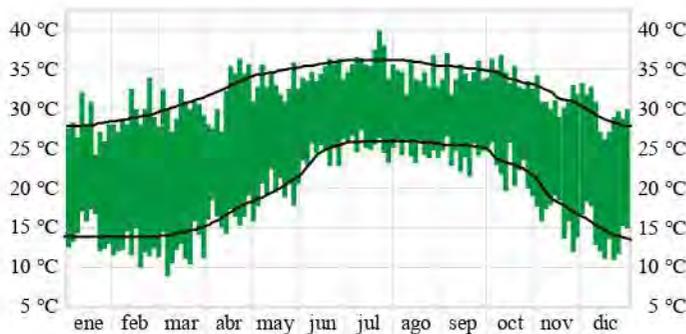


Figura 1.4. Datos históricos de temperatura en Culiacán en 2022.

Nota: El intervalo diario de temperaturas reportadas (barras azules), colocadas arriba del promedio diario de la máxima (línea negra superior) y de la mínima (línea negra inferior).

Fuente: Elaboración propia tomando como referencia la gráfica dada por © WeatherSpark.com, para uso educativo.

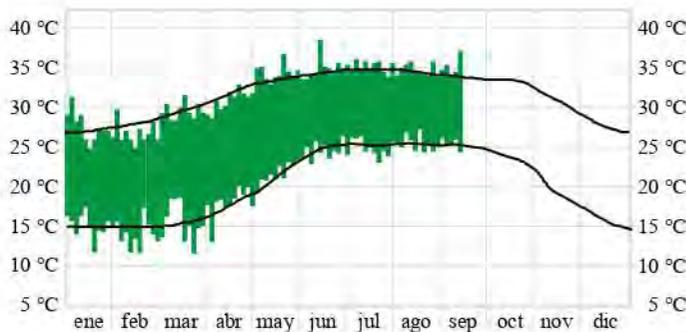


Figura 1.5. Datos históricos de temperatura en Culiacán en 2023.

Nota: El intervalo diario de temperaturas reportadas (barras azules), colocadas arriba del promedio diario de la máxima (línea negra superior) y de la mínima (línea negra inferior).

Fuente: Elaboración propia tomando como referencia la gráfica dada por © WeatherSpark.com, para uso educativo.

Actividad de aprendizaje 1.3

Toma decisiones basadas en la información presentada en las Figuras 1.3, 1.4 y 1.5.

1. Con la información presentada sobre la temperatura en Culiacán, fija una postura con respecto a la conjetura planteada en la Actividad de Aprendizaje 1.2. _____

2. Si el 13 de junio de 2023, la temperatura máxima en Culiacán fue 41 °C, cada año, en el mismo día, ¿se tendrá la misma temperatura máxima? _____ Justifica tu respuesta. _____

3. ¿Qué interpretación le das a la continuación de las líneas, superior e inferior, después de la última medición de temperatura en septiembre? _____

4. Este año, ¿a partir de qué fecha consideras necesario usar abrigo? _____

5. Explica la importancia de organizar los datos de la temperatura y presentarlos en forma de gráficas. _____

La organización de datos estadísticos es importante para tomar decisiones, ya que, al presentarse en forma de tablas o gráficas, estas son visualmente más fáciles de interpretar.

Actividad de aprendizaje 1.4

1. Elabora una lista de fenómenos o situaciones aleatorios que ocurren en tu comunidad e identifica su nivel de riesgo para la población y toma decisiones para la prevención de riesgos.

	Fenómeno aleatorio	Nivel de riesgo		
		Mínimo	Moderado	Máximo
1.				
2.				
3.				
4.				

2. Para atender el fenómeno aleatorio de mayor riesgo para la población:
 - a) ¿Qué datos se necesitan recolectar? _____

 - b) ¿Qué forma de visualización de los datos facilita su interpretación? _____

 - c) Para disminuir el nivel de riesgo para la población, basado en los datos organizados, ¿qué decisiones se deben tomar? _____

Como ya viste, la organización de datos en formas que faciliten su visualización ayuda a la toma de decisiones. También, a partir de la información de una imagen satelital puedes tomar decisiones, como es el caso del tráfico vehicular.

Por ejemplo, en Culiacán, de acuerdo con el INEGI en el 2022 había 542 172 vehículos registrados y el 69% de los hogares tenían acceso a un automóvil, incluso llegando a haber más de dos por familia. Actualmente, este fenómeno provoca caos vial en las horas picos que abarcan los siguientes horarios: de 7:00 a 9:00 de la mañana, de 1:00 a 2:00 del mediodía y de 5:30 a 7:30 de la tarde.

En las horas pico, los taxistas y repartidores de comida a través de una aplicación como Uber®, Rappi® o DiDi® (en Google play), por mencionar algunos, se auxilian de una plataforma integrada a Google Maps® o Waze® (aplicaciones que proporcionan información en tiempo real sobre la ruta y el tráfico vehicular) para tomar rutas alternas y evitar en lo posible los embotellamientos, no siendo así en el caso de la mayoría de los automovilistas que residen en Culiacán. Aunque estas aplicaciones ofrecen rutas alternas, puede que no sea la mejor, es aquí donde entra el conocimiento que tienen los taxistas y los repartidores de comida de las vialidades de Culiacán.

Actividad de aprendizaje 1.5

Toma de decisiones a partir de una imagen satelital del tráfico vehicular. Imagina que trabajas como repartidor de comida rápida (en motocicleta) y debes recoger una pizza a la 1:30 pm, en Little Caesars® ubicada en Enrique Félix Castro, Humaya, Desarrollo Urbano Tres Ríos, 80020, Culiacán Rosales, Sinaloa. Luego, llevarla a la tienda Waldo's® con domicilio en Av. Álvaro Obregón esq. con Mariano Escobedo, Centro, 80000, Culiacán Rosales, Sinaloa.

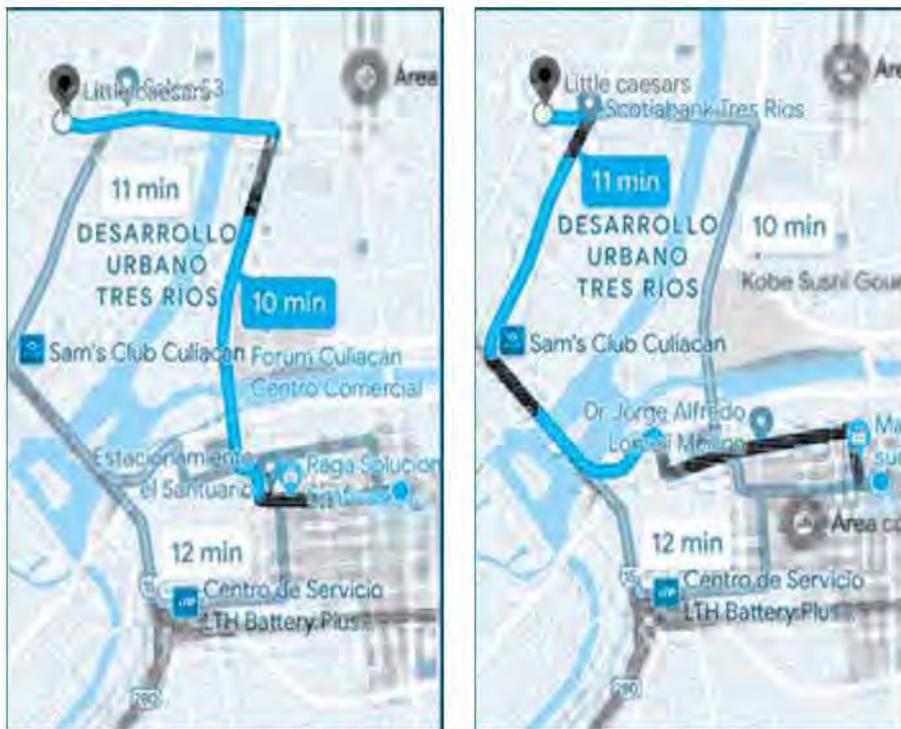


Figura 1.6. Rutas sugeridas por Google Maps, de Little Caesars® a Waldo's®
Fuente: (Google, 2023)

1. A partir de la información en la Figura 1.6, ¿qué ruta alterna propones tomar para llegar antes del tiempo estimado de entrega? _____
2. Comenta en el grupo las rutas alternas elegidas y observa si varían las trayectorias, ¿qué puedes concluir con respecto a la variación? _____

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: _____ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 1. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Reconocí que la organización de datos y su visualización ayuda a la toma razonada de decisiones en la solución de problemas cotidianos (M1-C2).			

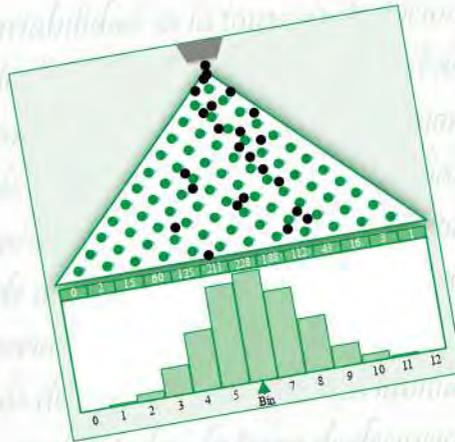
Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 1 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Reconoció que la organización de datos y su visualización ayuda a la toma razonada de decisiones en la solución de problemas cotidianos (M1-C2).			

Nombre y firma de quien coevalúa

La incertidumbre como consecuencia de la variabilidad



Progresión de aprendizaje 2

Identifica la incertidumbre como consecuencia de la variabilidad y, a través de simulaciones, considera la frecuencia con la que un evento aleatorio puede ocurrir, con la finalidad de tener más información sobre la probabilidad de que dicho evento suceda.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			
M2-C2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.	A			
	C			
	H			

Ya has estudiado lo que significa un suceso aleatorio o un suceso determinista.

Actividad de aprendizaje 2.1

Analiza cuáles de los siguientes sucesos consideras son deterministas (D) o aleatorios (A).

1. Congelar una botella de agua en el refrigerador: _____
2. Extraer una bola par de una bolsa con 10 bolas numeradas del 1 al 10: _____
3. Personas que van al cine en un día: _____
4. Voltar una ficha de dominó que sea el doble 5: _____
5. Medir la altura de un edificio. _____

Sin embargo, no todos los sucesos o eventos que se nos presentan tienen un carácter aleatorio o determinista. El contexto en el que te encuentras se compone de diversas situaciones que pueden presentar variabilidad y, consecuentemente, cierta incertidumbre en las que, de acuerdo con tus gustos, necesidades, informaciones, consideraciones o criterios, habrás de tomar una decisión, como parte del ejercicio pleno y responsable de tus capacidades.

Por su parte, una forma de ayudarnos a tomar decisiones, de manera más objetiva, es considerar e interpretar la variabilidad que puede tener un *fenómeno* o la incertidumbre sobre su manifestación, lo cual ayudaría a decidir sobre el mismo, ya sea de manera intuitiva o analizando información, para minimizar riesgos y errores.

Así pues, bajo ciertas condiciones, para tomar decisiones se requiere de un pensamiento sobre lo probable o *pensamiento probabilístico*, donde se reconoce que la *incertidumbre* es la falta de conocimiento o información precisa sobre las diferentes probabilidades de ocurrencia de un suceso, mientras que la *variabilidad* se refiere a la heterogeneidad o a la variación intrínseca de una cantidad o un fenómeno que propician resultados con diferentes valores de probabilidad.

En esta progresión aprenderás y trabajarás sobre estos temas.

Actividad de aprendizaje 2.2

Registra las ideas sobre algunos conceptos que faciliten comprender y comunicar de manera adecuada el pensamiento probabilístico.

1. Define y ejemplifica un fenómeno probabilístico. _____

2. Plantea situaciones (fenómenos) de tu escuela que presenten variabilidad. _____

3. De acuerdo con la situación que mencionaste, ¿cómo puede ser afectada esta por la incertidumbre, como consecuencia de dicha variabilidad? _____

4. Interpreta el concepto de evento o suceso en el campo de la probabilidad. _____

5. Describe una situación donde sólo exista un resultado posible. _____

La *variabilidad* en un fenómeno puede producir *incertidumbre*. Cuando un fenómeno es variable, sus características o resultados pueden cambiar o fluctuar en diferentes situaciones o momentos. Esta variabilidad puede generar incertidumbre porque no se puede predecir con certeza cómo se comportará el fenómeno en cada caso específico.

El calentamiento global constituye un fenómeno de interés mundial, en la actualidad, y proporciona un buen ejemplo de cómo hacer la distinción entre variabilidad e incertidumbre. El análisis de la evidencia disponible ha permitido disminuir constantemente nuestro nivel de *incertidumbre* de que el promedio, a nivel mundial, de las temperaturas está aumentando. Pero todavía hay mucha variabilidad en cómo un aumento en la temperatura media se traduce en patrones climáticos y sus consecuencias en diferentes lugares y en diferentes formas, por lo que aún no podemos predecir con un grado razonable de precisión cuáles serán los efectos del calentamiento global en un momento y lugar dados.

¿Consideras que es posible **predecir el futuro**? La respuesta sin lugar a duda, al menos por el momento, es que no, pues en caso afirmativo tendríamos que sentarnos frente a una bola de cristal o acudir ante alguien que lea las manos y creer en lo que nos exprese.

Sin embargo, podemos leer en un medio de información, como El MUNDO², de España, una noticia como la siguiente:

² Periódico *El Mundo*, mayo 17 de 2023.

EL MUNDO

Según la Organización Meteorológica Mundial

La subida de la temperatura media mundial llegará a 1.5 °C probablemente entre 2023 y 2027

Figura 2.1 La temperatura media mundial.

Fuente: Elaboración propia, con base en, El Mundo, Disponible en: <https://www.elmundo.es/ciencia-y-salud/medio-ambiente/2023/05/17/6464aac3fdddf5c698b45c7.html>, para uso educativo.

Esa información resulta más creíble y nos lleva a conceptos relacionados con las ciencias, al conocimiento de expertos o al rigor en el análisis de información a partir de registros obtenidos. ¡Y son predicciones sobre el futuro!

¿En qué puede basarse este tipo de predicción para hacer afirmaciones igual que la anterior?

En ese sentido, *las probabilidades*, como rama de las matemáticas, resultan de gran utilidad cuando se ha obtenido una base de información que nos permita hacer inferencias útiles para la toma de decisiones; una recopilación de datos estadísticos nos proporcionará elementos objetivos, que pueden ser utilizados, para conocer la probabilidad de ocurrencia de un evento, y así tener un mejor criterio al identificar y evaluar las alternativas de solución.

Lee con atención la siguiente situación que permite identificar un problema que precisa la recolección de datos para su posterior análisis.

“La participación de la ciudadanía en el cuidado y promoción de la salud: el dengue”

La salud de las personas y de las poblaciones no depende exclusivamente de las intervenciones del sistema sanitario, sino que también es susceptible a los determinantes biológicos, ambientales y sociales. En este caso, es de interés común promover una “Responsabilidad Ciudadana” y como consecuencia una participación de las y los jóvenes con la intención de concientizar y mejorar la salud de la población al detectar, analizar y estudiar, en este caso específico, la situación del dengue.

Por ello, resulta acertado informarnos y adquirir elementos relevantes sobre esta situación, acudiendo a fuentes de consultas y explorando los datos para aprender a hacer las interpretaciones necesarias al aplicar procedimientos adecuados y determinar las probabilidades a partir de un *enfoque frecuencial*.

Ello es debido a que la incertidumbre en la variabilidad de la situación del dengue se relaciona con la imprevisibilidad de la propagación y el brote de la enfermedad ocasionada por factores como el clima y el agua estancada que propician la reproducción del mosquito. Esto dificulta la predicción precisa de los momentos y lugares donde se producirán los brotes, lo que complica la planificación y respuesta efectiva ante el dengue. (El Mundo, mayo 17 de 2023)

Analizar los datos de una tabla sobre los casos confirmados de dengue puede servir para identificar patrones, tendencias y áreas de mayor incidencia de la enfermedad, lo que puede ayudar en la toma de decisiones para implementar medidas de prevención y control del dengue; también, puede ser útil para evaluar la eficacia de las intervenciones y realizar investigaciones epidemiológicas.

Organización y presentación de datos

La Tabla 2.1 muestra datos estadísticos sobre los casos confirmados de dengue por cada municipio del estado de Sinaloa, comparando los años 2022 y 2023.

Casos confirmados de dengue en plataforma vectores, comparativo 2022-2023 acumulados hasta semana 39									
Jurisdicción	Municipio	Dengue no grave		Dengue con signos de alarma		Dengue grave		Total	
		2022	2023	2022	2023	2022	2023	2022	2023
1-1	Ahome	10	2	25	7	0	1	36	10
	Choix	0	0	0	0	5	0	5	0
	El Fuerte	12	1	13	2	2	0	27	3
1-2	Guasave	7	0	5	2	0	0	12	2
	Sinaloa	1	0	0	0	0	0	1	0
1-3	Angostura	1	0	2	1	0	0	3	1
	Mocorito	0	0	3	0	0	0	3	0
	S. Alvarado	7	1	19	3	0	0	26	4
1-4	Badiraguato	10	0	9	0	2	0	21	0
	Culiacán	34	5	45	4	2	0	81	10
	Navolato	7	0	8	0	0	0	15	0
	Cosalá	0	0	0	0	0	0	0	0
1-5	Elota	0	0	0	1	0	0	0	1
	San Ignacio	1	0	0	0	0	0	1	0
	Concordia	0	0	0	1	0	0	0	1
	Mazatlán	3	5	6	4	1	0	10	9
1-6	Escuinapa	11	45	3	14	1	3	15	62
	Rosario	0	0	1	0	0	0	1	0
	Total	105	59	139	39	13	5	257	103

Tabla 2.1. Casos confirmados de dengue correspondiente a la semana epidemiológica No. 39. de los años 2022 y 2023.

Fuente: Secretaría de Salud Sinaloa, 2017.

Con base en la información, es posible acomodar la información de tal manera que puedas reconocer datos relevantes y encontrar algún patrón en la información, para lo cual es pertinente e imprescindible introducir la frecuencia absoluta (f_a) y la frecuencia relativa (f_r):

- **Frecuencia absoluta (f_a)**. Es el número de veces que se presenta cada modalidad.
- **Frecuencia relativa (f_r)** Es el valor que representa la proporción del número de veces que se repite el dato en la colección. Se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta entre el total de datos, $f_r = \frac{f_a}{N}$.

Actividad de aprendizaje 2.3

Con base en la información de la Tabla 2.1, representa de manera conveniente los datos de las variables donde describas el número de veces que se presenta cada evento (f_a) y la parte que representa respecto al total de la población (f_r) en 2023.



En la siguiente fuente de consulta puedes actualizar, adecuar o modificar las tablas de datos estadísticos sobre casos confirmados de dengue en el año y semana epidemiológica de interés.

<https://saludsinaloa.gob.mx/index.php/boletines-de-epidemiologia/>

Municipio	Casos totales 2023 f_a	$f_r = \frac{f_a}{N}$
Ahome		
Choix		
El Fuerte		
Guasave		
Sinaloa		
Angostura		
Mocorito		
S. Alvarado		
Badiraguato		
Culiacán		
Navolato		
Cosalá		
Elota		
San Ignacio		
Concordia		
Mazatlán		
Escuinapa		
Rosario		

Otra manera de representar la información es mediante gráficos

Los gráficos estadísticos son representaciones visuales de datos numéricos o información estadística, que permiten visualizar patrones, tendencias y relaciones entre variables.

Para las variables cualitativas, como es el caso analizado anteriormente, se suelen utilizar el gráfico de barras y el gráfico de sectores (también llamado gráfico circular o de pastel).



Practicando. Utiliza una hoja de cálculo y grafica la frecuencia absoluta en un diagrama de barras; así mismo, usa la frecuencia relativa y grafica un diagrama de sectores circulares.

Usa la página para gráficos circulares siguiente:
https://eduteka.icesi.edu.co/mi/actividades/temas/temas.php?act=grafico_circular

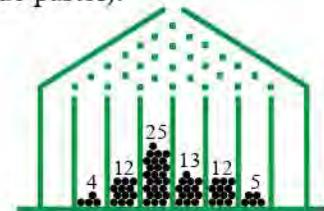


Figura 2.2. Máquina de las bolas utilizada como una representación visual de la distribución de probabilidad en eventos aleatorios. Fuente: PhET, 2023.

Una vez conocido el procedimiento para organizar, analizar y presentar datos, puedes considerar el uso de simuladores para establecer la frecuencia con la que ocurre un evento aleatorio y así obtener información sobre su probabilidad de ocurrencia. Esto ayuda a tener una mejor comprensión y manejo de la incertidumbre en situaciones probabilísticas.

La máquina de Galton o tablero de Galton, que nos muestra la Figura 2.2, es un dispositivo que ilustra la distribución estadística de los eventos aleatorios. Consiste en una serie de clavijas dispuestas en forma de pirámide por las cuales caen bolas que siguen una trayectoria aleatoria hasta llegar a los compartimentos inferiores, mostrando así la distribución.

Actividad de aprendizaje 2.4

Realiza los siguientes experimentos utilizando el simulador y siguiendo las indicaciones en cada caso. Ingresar al simulador del tablero de Galton, en la liga <https://phet.colorado.edu/en/simulations/plinko-probability>

1. **Practicando.** Realiza experimentos (lanzamiento de pelotas) para que observes el funcionamiento del tablero de Galton: lanza una pelota, diez pelotas o todas las pelotas de acuerdo a la Figura 2.3.
2. **Generando datos.** Analiza la Figura 2.4 y realiza lo siguiente:
 - a) Ingresa al laboratorio del simulador.
 - b) Determina el número de compartimentos.
 - c) Lanza un determinado número de pelotas.
 - d) Observa la frecuencia de acuerdo con su posición.
3. **Analizando.** Para ello, observa la Figura 2.5. y haz una captura de pantalla de tu experimento y explora los datos en una tabla de frecuencias donde colocarás el número de compartimento, la cantidad de pelotas que hay en cada uno de ellos y su probabilidad frecuencial (frecuencia relativa y porcentaje).

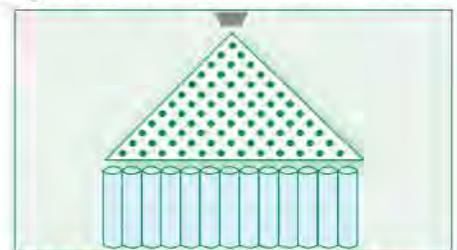


Figura 2.3. Simulador de Tablero Galton para hacer lanzamiento de diversas cantidades de pelotas. Fuente: PhET, 2023.

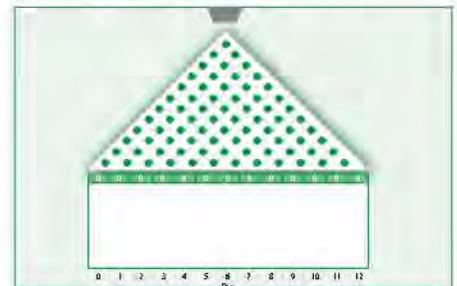


Figura 2.4. Simulador de un laboratorio como ambiente de aprendizaje para conocer la probabilidad frecuencial de eventos. Fuente: PhET, 2023.

Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿En qué compartimiento es más probable que caigan las pelotas? _____

b) Describe el comportamiento de la variabilidad muestral (valores de 0 a 1). __

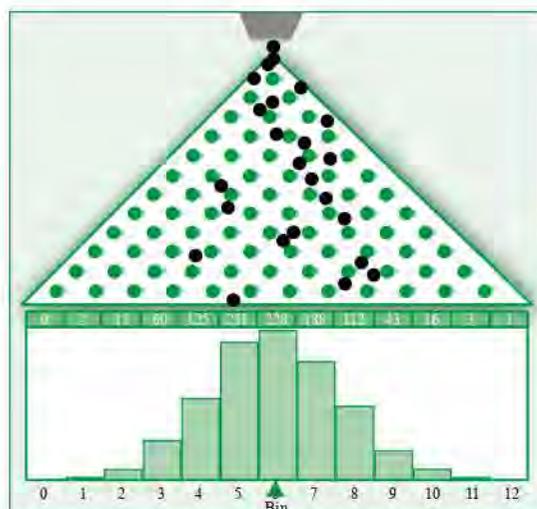


Figura 2.5. Experimento utilizado para analizar y predecir los resultados del juego. Fuente: PhET, 2023.

c) ¿Qué valores (compartimientos) son atípicos en la distribución de las pelotas? _____

d) ¿Cuál es la suma de todas las frecuencias relativas? _____

e) De acuerdo con tu análisis visual, ¿qué forma queda definida en el tablero de Galton? _____

A partir de lo aprendido, hasta el momento, en la progresión de aprendizaje, es importante considerar en un sentido más estricto, que el observar y obtener información de una situación o fenómeno contribuye a establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo y tomar decisiones informadas. A continuación, vas a desarrollar y aplicar un procedimiento, en un aspecto importante, para tener una vida saludable, como es el caso del sueño.

Vida saludable y el sueño

La actividad física y el sueño adecuado, además de contribuir a la salud, ayuda en el desempeño académico de las y los adolescentes. Es una actividad tan necesaria para el ser humano como la alimentación saludable, el movimiento, la respiración y la hidratación con agua simple. Particularmente, el sueño es esencial para la salud física, y mental, para mejorar la memoria, la concentración y promover la seguridad individual y pública; por el contrario, un sueño insuficiente y de baja calidad puede afectar la calidad de vida en general.

Las recomendaciones de horas de sueño son sugeridas por grupos de edad; para las personas de 14-17 años, el Instituto Nacional de Salud de Estados Unidos (National Institutes of Health s.f.) recomienda que duerman de 8-10 horas para tener los efectos positivos como pensar con claridad, reaccionar con rapidez y crear recuerdos, además de ayudar a prevenir infecciones o a recuperarte más rápidamente de estas.

Actividad de aprendizaje 2.5

Organiza, analiza y presenta la información de manera útil con el fin de extraer interpretaciones y resultados significativos. Realiza un sondeo con compañeros de tu grupo (15 a 20) para recolectar datos sobre la variable “horas de sueño”.

1. Trabaja de manera sistemática en los siguientes procesos sobre la cantidad de horas que duermen a diario tus compañeros, generalmente:
 - a) Recolecta los datos correspondientes a las “horas de sueño”.
 - b) Organiza los datos.
 - c) Grafica los datos en un diagrama de barras o pastel. Puedes utilizar la aplicación de Excel en tu celular.
2. De acuerdo con los datos recabados y organizados en la tabla, responde a las siguientes preguntas de interés.
 - a) ¿Cuántos duermen menos de 7 horas diariamente? _____
 - b) ¿Qué porcentaje de alumnos duermen 8 horas diariamente? _____

 - c) ¿Cuál es la cantidad de horas de sueño que predominó en ellos? _____

 - d) ¿Cuál es la cantidad de horas de sueño mínima que tuvieron? _____

 - e) ¿Qué promedio de horas duermen los estudiantes? _____
3. Reflexiona sobre tus hábitos de sueño.
 - a) Investiga en fuentes confiables sobre las consecuencias negativas que tiene en nuestro organismo la baja calidad del sueño.
 - b) Plantea algunas acciones y/o sugerencias elaboradas por especialistas que contribuirán a mejorar tus hábitos de sueño.

Veamos otro ejemplo en el que es importante considerar la frecuencia relativa. En el beisbol, el promedio ofensivo de bateo de un bateador se calcula dividiendo la cantidad de hits que ha bateado entre las veces que ha ido al bate en forma acumulativa. Si en una temporada de juegos ha bateado 91 hits en 275 turnos al bate su promedio ofensivo es $91/275 \approx 0.33$. Ello significa que la probabilidad de dar un hit de ese bateador cada vez que va al bate es de 0.33 o bien que da un hit una de cada tres veces que batea.

Si en un juego el bateador ha fallado dos veces consecutivas, ¿eso significa que la próxima vez que esté al bate dará un hit? _____

Fundamenta tu respuesta: _____

Un jugador de beisbol puede participar en cinco, seis o más temporadas de juegos y, por tanto, tener un promedio ofensivo de bateo acumulado que ofrece una información más fidedigna sobre la consistencia de dar hit cuando batea.

Yasmany Tomás, cubano, es un jugador activo de beisbol en la Liga Mexicana del Pacífico, en Los Cañeros de Los Mochis y fue elegido el “Jugador Más Valioso” de la Temporada 22-23 en dicha liga³.

En esta temporada tuvo $0.328 \approx 0.33$ como promedio ofensivo de bateo, lo que significa que, como promedio, da un hit cada tres veces que batea. En la tabla siguiente aparece su promedio ofensivo durante cuatro temporadas:

Temporada	T	AB	R	H	2B	3B	HR	RBI	BB	HBP	K	SB	CS	AVG	OBP	SLG	OPS	WAR
2015	118	406	40	111	19	3	9	48	17	2	110	5	2	.273	.305	.401	.707	-1.3
2016	140	530	72	144	30	1	31	83	31	1	136	2	4	.272	.313	.508	.820	-0.4
2017	47	166	19	40	11	1	8	32	13	0	50	0	0	.241	.294	.464	.758	-0.5
2019	4	6	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	.000	.000	.000	.000	-0.2
Carrera	309	1108	131	295	60	5	48	163	61	3	299	7	6	.266	.306	.459	.765	-
Promedios de temporada	77	277	33	74	15	1	12	41	15	1	75	2	2	.266	.306	.459	.765	-

Tabla 2.2. Promedio ofensivo durante cuatro temporadas de Yasmany Tomás.

Fuente: https://www.espn.com.mx/beisbol/mlb/jugador/estadisticas/_/id/33662/yasmany-tomas

En la penúltima fila se aprecia, que en 1108 veces al bate conectó 295 hits para un promedio acumulado de $0.266 > 0.25$, lo que significa que conectaba de hits, aproximadamente más de una vez cada cuatro veces.

Actividad de aprendizaje 2.6

1. ¿A partir del resultado actual de Yasmani Tomás puede inferirse que ha mejorado su técnica de bateo? _____

¿Por qué?

2. ¿Si dirigieras el equipo de Los Cañeros de Los Mochis te animarías a seguir contratándolo para la siguiente temporada? _____

¿Por qué?

Como habrás podido apreciar en los ejemplos anteriores, la frecuencia con que ocurre un evento puede constituir una fuente importante para tomar decisiones sobre dicho suceso.

En la próxima progresión de aprendizaje, verás que al repetir muchas veces un experimento la frecuencia de que suceda un evento tiende a un valor constante.

3 <https://www.septimaentrada.com/liga-mexicana-del-pacifico/lmp-yasmany-tomas-jugador-valioso-2022-23>

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 2 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Entendí la diferencia entre incertidumbre y variabilidad (M1-C2).			
Comprendí como la organización en tablas de los datos sobre un fenómeno y su representación gráfica contribuye a interpretar dicho fenómeno (M2-C2).			

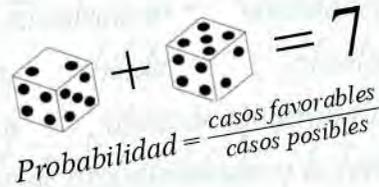
Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 2 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Entendió la diferencia entre incertidumbre y variabilidad (M1-C2).			
Comprendió cómo la organización en tablas de los datos sobre un fenómeno y su representación gráfica contribuye a interpretar dicho fenómeno (M2-C2).			

Nombre y firma de quien coevalúa

El cálculo de probabilidades y la hipótesis de equiprobabilidad



Progresión de aprendizaje 3

Identifica la equiprobabilidad como una hipótesis que, en caso de que se pueda asumir, facilita el estudio de la probabilidad y observa que cuando se incrementa el número de repeticiones de una simulación, la frecuencia del evento estudiado tiende a su probabilidad teórica.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
MI-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
MI-C3 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	A			
	C			
	H			
MI-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

En El Rosario, Sinaloa, una de las principales fuentes de empleo de las familias está en las diferentes emparadoras, cuyo producto principal es el mango, generalmente como un producto no procesado, mismo que solo es seleccionado y empacado, atendiendo las diferentes normas exigidas por los mercados internacionales; uno de los principales requisitos, entre otros, es la presentación adecuada del producto, el cual se empaca en cajas que deben presentar ciertas características para que puedan cubrir las exigencias de los diferentes importadores del mundo.

Dentro de estas empresas trabajan personas encargadas de realizar proyecciones por medio de modelos probabilísticos, con los que pueden apreciar cuánto mango de buena calidad llegará aproximadamente cada mes. En esta progresión vas a estudiar una forma en la que pueden estimar esa proyección.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Relaciona las siguientes preguntas con su posible respuesta, anotando en el paréntesis el inciso de la respuesta que consideras correcta.

- | | |
|---|--|
| () ¿Qué entiendes como evento equiprobable? | A) Evento o proceso cuyo resultado no se puede predecir con certeza. |
| () ¿Qué entiendes como evento no equiprobable? | B) Son los experimentos cuyos resultados pueden predecirse. |
| () ¿Qué es un experimento aleatorio? | C) Los posibles resultados tienen la misma posibilidad de ocurrir. |
| () ¿Qué es un experimento determinista? | D) Los resultados de sus eventos no tienen la misma probabilidad de ocurrir. |

3.1. Eventos equiprobables y no equiprobables

La equiprobabilidad es un concepto que se utiliza en ciertos eventos aleatorios, en los que se conoce el número de resultados posibles y cada uno de los n casos posibles tiene la misma posibilidad de ocurrir; por ejemplo, al lanzar una moneda, se sabe que podemos obtener dos resultados posibles, $n = 2$, y se tiene $1/2 = 0.5$, o bien, 50% de probabilidad de obtener cada uno de los dos resultados; las dos situaciones son igualmente probables de ocurrir.

Otro ejemplo para explicar la equiprobabilidad sería el lanzamiento de un dado, suponiendo que el dado no está cargado, pesa y mide lo mismo en todas sus caras; la diferencia con el caso anterior es que $n = 6$; por ende, la probabilidad de que ocurra cada evento es igual a $1/6 = 0.167$, o bien 16.7%, pero como en el caso anterior, cada uno de los eventos posibles tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Actividad de aprendizaje 3.1

Un juego que se utiliza mucho para elegir quién ganará entre dos personas es el de *par o impar*. Para ello, seleccionan inicialmente una de las dos opciones entre par o impar y a continuación muestran simultáneamente, un número de dedos de una mano que tenían detrás de la espalda, se suman y si la suma de los dedos obtenida es par o impar gana el que eligió esa opción.

- ¿Piensas que los resultados son igualmente probables? _____
- Comprueba entonces tu suposición. Para ello completa la tabla que aparece a continuación, colocando en cada casilla la suma correspondiente a los dedos de las dos manos:

					
		3			
				6	
					
					
					

- Una vez hecho esto responde:
 - ¿Cuántos casos posibles hay? _____
 - ¿Cuántos son sumas pares? _____
 - ¿Cuántos son sumas impares? _____
- Calcula la probabilidad de obtener:
 - Suma par: _____
 - Suma impar: _____
 - ¿Son igualmente probables los dos sucesos? _____
- ¿Qué opción elegirías para tener más posibilidades de ganar? _____

Como habrás comprobado, no es igualmente probable que salga una opción o la otra. La probabilidad demuestra que hay más posibilidades de que salga un número par, que uno impar.

Si dos eventos tienen la misma posibilidad de ocurrir se dice que son *equiprobables* y $P(A) = P(B)$; es decir, la probabilidad de que ocurra A es igual a la probabilidad de que ocurra B . En cambio, los eventos "*no equiprobables*" son aquellos donde la probabilidad de que ocurra el evento A , es diferente a que ocurra la del evento B , es decir $P(A) \neq P(B)$.

Actividad de aprendizaje 3.2

De los siguientes eventos, define con una (E) si el evento es equiprobable y una (N) si el evento es no equiprobable.

1. En una bolsa hay 5 canicas, 2 de color rojo y el resto de diferente color, (verde, azul, y amarillo); todas tienen el mismo tamaño y al extraer una, obtener color rojo. ()
2. Lanzar una moneda y que caiga águila al lanzarla. ()
3. Lanzar un dado que no esté cargado dos veces y que caiga cada vez el número 3. ()
4. Lanzar un dado que esté cargado dos veces y que caiga cada vez el número 3. ()

Hay fenómenos que se pueden modelar matemáticamente, por una relación causa-efecto, por ejemplo, determinar la distancia que recorre un vehículo a velocidad constante si se conoce el tiempo en que se va a mover; otros no, como saber qué día de la semana puede llover más. Si bien no es posible una descripción causa-efecto, eso no significa que no se pueda encontrar una forma de referir matemáticamente este tipo de fenómenos (llamados, como ya sabes, aleatorios o producto del azar); para ello se estudia la frecuencia con que ocurren o pueden ocurrir y se emplea una descripción estadística, con un concepto matemático central: el de **probabilidad**.

3.2. Probabilidad teórica y probabilidad frecuencial

Para explicar la probabilidad teórica partiremos de un ejemplo específico: lanzar un dado que no se encuentre cargado, y el evento deseado es que se obtenga el número 3. El número total de eventos posibles N es igual a 6, ya que $N = \{1,2,3,4,5,6\}$ y el número de eventos favorables es $n = 1$, porque el evento deseado A es sólo el número 3.

Por tanto, la probabilidad de que salga el número 3 es igual a:

$$P(3) = \frac{1}{6} = 0.167,$$

y este resultado es lo que conocemos como **probabilidad teórica**:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{n}{N}$$

También la probabilidad suele expresarse en tanto por ciento, para lo cual el valor obtenido al calcular la probabilidad se multiplica por 100, es decir, $P(A) = \frac{n}{N} 100$, por lo que en el ejemplo anterior $P(3) = 16.7\%$.

Actividad de aprendizaje 3.3

Un juego de barajas trae 52 cartas y estas se dividen en 4 grupos de 13 cartas cada uno: picas (♠), corazones (♥), diamantes (♦) y tréboles (♣). Las cartas de picas y tréboles son negras, mientras que las cartas de corazones y diamantes son rojas. Las cartas de cada grupo son: as, rey, reina, sota, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 y 2.

La extracción de una carta en un juego de barajas, se basa en la probabilidad y se calcula dividiendo el número de cartas favorables por el número total de cartas en la baraja. Por tanto, la probabilidad de extraer:

1. Un 10 de color rojo es _____
2. Una carta de color negro es _____
3. Una carta de corazones es _____
4. Un rey o una reina _____

Ahora, si ese mismo experimento de lanzar un dado y querer obtener un tres lo llevas a cabo repetidas veces, podrás apreciar que la posibilidad de que se obtenga tres, no necesariamente coincide con la probabilidad teórica; pero, si el evento se repite un número considerable de veces, los valores cambiarán y se apreciará una tendencia: mientras más veces se repita el experimento, la posibilidad de obtener un tres se acercará a la probabilidad teórica. A este tipo de probabilidad se le denomina **probabilidad frecuencial**.

Para calcular esta probabilidad, es necesario realizar el experimento un número elevado de veces, ya que cuanto más se repite el experimento, los resultados serán más cercanos a la probabilidad teórica.

A diferencia de la probabilidad teórica, la probabilidad frecuencial de que ocurra un suceso A se calcula al dividir el número de casos favorables (s) entre el número de veces que se repite el experimento (N):

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables del experimento}}{\text{número de intentos}} = \frac{s}{N}$$

Ahora puedes poner en práctica estos nuevos conceptos en la siguiente actividad.

Actividad de aprendizaje 3.4

1. En la siguiente tabla se muestra el experimento donde se realizaron 10 lanzamientos de un dado y algunos resultados. Calcula la frecuencia relativa y la probabilidad frecuencial de los espacios en blanco.

Número del dado	Probabilidad teórica $P(A) = \frac{1}{6}$	Frecuencia absoluta (f)	Frecuencia relativa (f')	Probabilidad como porcentaje (%)
1	0.167	1	0.100	10%
2	0.167	3		30%
3	0.167	1		
4	0.167	1	0.100	10%
5	0.167	2	0.200	
6	0.167	2		20%
Total	1	10	1	100%

2. Podrás observar que la probabilidad frecuencial de cada uno de los eventos posibles no se corresponde con la probabilidad teórica. A continuación, repite el experimento una mayor cantidad de veces, por ejemplo, 100 veces, anota los resultados en la siguiente tabla y calcula los datos que faltan:

Número del dado	Probabilidad teórica $P(A) = \frac{1}{6}$	Frecuencia absoluta (f)	Frecuencia relativa (f')	Probabilidad como porcentaje (%)
1	0.167			
2	0.167			
3	0.167			
4	0.167			
5	0.167			
6	0.167			
Total	1	100	1	100%

3. Según los resultados, ¿hay similitud entre los valores de la probabilidad teórica y la frecuencia relativa obtenida? _____
4. En comparación con el lanzamiento del dado 10 veces, ¿qué puedes apreciar? _____

5. Ahora, llena la siguiente tabla con la suma de los resultados de 10 compañeros hasta completar los 1000 lanzamientos, calculando los datos de frecuencia absoluta, frecuencia relativa y probabilidad frecuencial.

Número del dado	Probabilidad teórica $P(A) = \frac{1}{6}$	Frecuencia absoluta (f)	Frecuencia relativa (fr)	Probabilidad como porcentaje (%)
1	0.167			
2	0.167			
3	0.167			
4	0.167			
5	0.167			
6	0.167			
Total	1	1000	1	100%

6. Analiza el comportamiento de los resultados comparando la probabilidad teórica con la frecuencia relativa obtenida con 10, 100 y 1000 anotaciones de lanzamientos del dado. ¿A qué conclusión llegas? _____

Debes haber apreciado que los resultados de la probabilidad teórica y la frecuencial tienden a ser aproximadamente iguales y que, cuanto mayor sea el número de veces que se repite el experimento, la probabilidad frecuencial se acerca bastante a la probabilidad teórica.

Realizar esta acción manualmente de aumentar el número de veces que se repite un suceso es bastante engorroso, pero puedes modelar tal acción con la ayuda de un software apropiado.

Actividad de aprendizaje 3.5

1. Considera lanzar dos dados y registra el resultado de la suma de las dos caras superiores. Las sumas posibles van desde dos hasta doce. Antes de simular el lanzamiento responde:
- ¿Cuál es el total de casos posibles de sumas que se pueden obtener? _____
 - ¿Todas las sumas entre dos y doce tienen la misma posibilidad de salir equitativamente. _____
Fundamenta tu respuesta: _____
 - ¿Cuáles sumas esperas resulten las más probables? _____
 - Calcula la probabilidad de salida de cada suma, en fracción decimal, dividiendo los casos posibles entre el total de casos. Así, obtienes:

$$P(2) = \underline{\quad} \quad P(3) = \underline{\quad} \quad P(4) = \underline{\quad} \quad P(5) = \underline{\quad} \quad P(6) = \underline{\quad} \quad P(7) = \underline{\quad}$$

$$P(8) = \underline{\quad} \quad P(9) = \underline{\quad} \quad P(10) = \underline{\quad} \quad P(11) = \underline{\quad} \quad P(12) = \underline{\quad}$$

2. Ahora proponte lanzar los dos dados un número considerable de veces, para ello, valerte de una aplicación para simular el lanzamiento de dos dados, con la cual obtienes rápidamente la información buscada.



Por ejemplo, en GeoGebra⁴ puedes usar el applet de la liga <https://www.geogebra.org/m/a3jszhpc> o <https://www.geogebra.org/m/PCpeDJQF>

⁴ GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas libre para todas las áreas de las matemáticas escolares (desde prebásica hasta educación superior). Su creador Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001.

Comprobemos que al aumentar el número de lanzamientos la suma de los números que aparecen al lanzar dos dados, las frecuencias relativas de los resultados se aproximan a su probabilidad teórica.

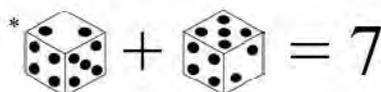
Resultado = {7,6,6,9,11,12,6,10,3,5,7,6,7,12,4,10,6,10,7,10,4,4,3,11,11,9,4,11,7,7,7,6,4,6,6,8,6,9,4,3,8,11,9,9,6,9,8,6,8,9,7,10,9,8,3,3,6,6,4,6,8,11,9,3...}

Mueva LANZAMIENTOS para tomar el # de lanzamientos de los dos dados o escriba el número de lanzamientos en la caja de entrada

n Lanzamientos = 5000

Escriba el número de lanzamientos de los dados 5000

Tecla F9 si va a repetir el experimento el mismo número de veces



$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

$$P(2) = P(12) = \frac{1}{36} = 0.0277\dots$$

$$P(5) = P(9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0.1111\dots$$

$$P(3) = P(11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = 0.0555\dots$$

$$P(6) = P(8) = \frac{5}{36} = 0.1388\dots$$

$$P(4) = P(10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0.0833\dots$$

$$P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0.1666\dots$$

Suma	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
2	134	0.0268
3	279	0.0558
4	437	0.0874
5	544	0.1088
6	706	0.1412
7	861	0.1722
8	639	0.1278
9	574	0.1148
10	430	0.086
11	251	0.0502
12	145	0.029
Total	5000	1

Figura 3.1. Simulación del lanzamiento de dados para obtener la frecuencia relativa.

Fuente: GeoGebra, Disponible en: <https://www.geogebra.org/m/PCpeDJQF>

*Dos dados. Ilustración: Mario Montijo Moreno (Blender, 2023).

- a) Variando el número de veces entre 100 y 10000 en que se repite el lanzamiento puedes obtener todos los datos que te permitan completar la siguiente tabla:

Suma de las caras superiores de los dos dados	Frecuencia absoluta (f)	Frecuencia relativa (f_r)	Frecuencia relativa para los siguientes lanzamientos.			
			100	1000	5000	10000
			f_r	f_r	f_r	f_r
2	1	0.028				
3	2	0.056				
4	3					
5	4					
6	5	0.139				
7	6	0.166				
8	5	0.139				
9	4					
10	3					
11	2	0.056				
12	1	0.028				
Total	36	1	1	1	1	1

- b) Compara los resultados obtenidos en cada medición con los de la probabilidad de ocurrencia previamente obtenidos. ¿Se acerca la frecuencia relativa a esos valores a medida que crecen los lanzamientos?

Actividad de aprendizaje 3.6

Lanza una moneda para determinar la probabilidad teórica y frecuencial.

- Calcula la probabilidad teórica de la ocurrencia de sol y de águila en el lanzamiento de una moneda.
- Lanza una moneda un total de 20 veces y marca el resultado con una **X** en el siguiente formato (A significa águila; S significa sol):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
S																				

- Responde lo siguiente:
 - Número de casos favorables para águila. _____
 - Número de casos favorables para sol. _____
 - Probabilidad frecuencial para águila. _____
- Ahora reúne los resultados junto con los de otros nueve compañeros (total 100 lanzamientos, $N = 100$) y vuelve a contestar lo siguiente.
 - Número de casos favorables para águila. _____
 - Número de casos favorables para sol. _____
 - Probabilidad frecuencial para águila. _____
- ¿A qué conclusión llegas? Compártela con tus compañeros. _____

Teniendo en cuenta lo estudiado vamos a retomar la situación del empaque de mangos para exportación en el municipio de El Rosario.

Actividad de aprendizaje 3.7

En los empaques de El Rosario, llegan los camiones con jabas llenas de mangos recolectadas directamente de los diferentes huertos, en donde cada camión llega con aproximadamente 600 jabas, este mango se separa en mango de exportación y en mango de rezaga que no es apto para la exportación.

- Los resultados de las 10 últimas semanas se muestran en la siguiente tabla. Con ellos, calcula la frecuencia relativa y la probabilidad en porcentaje.

Semana	Jabas recibidas	Jabas aptas	Jabas aptas		
			Porcentaje (%)	Frecuencia relativa (f_r)	Probabilidad (%)
1	5500	5055	91.91		
2	5320	4831	90.81		
3	5100	4529	88.80		
4	5120	4572	89.30		
5	5360	4824	90.00		
6	5600	5096	91.00		
7	5650	4972	88.58		
8	5500	5005	90.00		
9	5470	4923	90.00		
10	5510	4986	90.49		

2. Con dichos resultados los encargados del empaque quieren conocer la probabilidad de que en la semana en curso los resultados estén como mínimo en el 90%. Utilizando la probabilidad frecuencial calcula qué probabilidad hay de que los resultados cumplan esa expectativa. _____
3. En la semana actual cada camión llega con 600 jabas y se obtienen los siguientes datos:
 - a) El lunes llega un camión con 90 jabas de rezaga.
 - b) El martes dos camiones, uno con 18 y otro con 54 jabas de rezaga.
 - c) El miércoles llega un camión con 66 jabas de rezaga.
 - d) El jueves tres camiones con 60, 96 y 30 jabas de rezaga respectivamente.
 - e) El viernes dos camiones, uno con 48 y el otro con 60 jabas de rezaga.

Confecciona una tabla en la que se relacione por cada día de la semana los camiones que llegaron a la empacadora, la cantidad de jabas de mango recibidas y de ellas, cuántas resultaron de mangos aptos para exportar. Con dicha información, calcula el porcentaje respecto a cada camión, la frecuencia relativa y la probabilidad en por ciento.

Día	Nº de camiones	Jabas recibidas	Jabas aptas	Jabas aptas		
				Porcentaje (%)	Frecuencia relativa (f_i')	Probabilidad (%)
Lunes						
Martes						
Miércoles						
Jueves						
Viernes						
Total						

4. ¿Cuál es el total de jabas de mangos recibidas y de ellas el total de jabas aptas? _____
5. ¿Cuál es la probabilidad de jabas aptas? Expresa el resultado en porcentaje. _____
6. ¿Se cumplen las expectativas de los encargados del empaque? _____

Fundamenta tu respuesta: _____

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: _____ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 3. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Apliqué el incremento de la frecuencia de ocurrencia de un evento para comprobar su aproximación a la probabilidad teórica de que ocurra (M1-C1).			
Entendí la diferencia entre eventos equiprobables y no equiprobables (M1-C3).			
Interpreté adecuadamente, en una situación dada, la diferencia entre los casos posibles de ocurrencia de un suceso y el total de casos, para aplicar el concepto de probabilidad (M1-C4).			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 3 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Aplicó el incremento de la frecuencia de ocurrencia de un evento para comprobar su aproximación a la probabilidad teórica de que ocurra (M1-C1).			
Supo apreciar la diferencia entre eventos equiprobables y no equiprobables (M1-C3).			
Interpretó adecuadamente, en una situación dada, la diferencia entre los casos posibles de ocurrencia de un suceso y el total de casos, para aplicar el concepto de probabilidad (M1-C4).			

Nombre y firma de quien coevalúa

La probabilidad y las técnicas de conteo

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (?) \quad C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$P(s) = \frac{C_t^s \cdot C_{r-t}^{n-s}}{C_r^n}, s < n, r < t$$

Progresión de aprendizaje 4

Elige una técnica de conteo (ordenaciones con repetición, ordenaciones, permutaciones, combinaciones) para calcular el número total de casos posibles y casos favorables para eventos simples con la finalidad de hallar su probabilidad y, con ello, generar una mayor conciencia en la toma de decisiones.

Las técnicas de conteo se introducen para entender la probabilidad de eventos aleatorios en los que la expresión explícita de su espacio muestral es poco factible.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del Pensamiento Matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	A			
	C			
	H			
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la realización de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	A			
	C			
	H			
M3-C3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del Pensamiento Matemático, de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno.	A			
	C			
	H			

Es muy probable que te hayas hecho la pregunta siguiente: ¿qué probabilidad tengo de que me roben información confidencial o la contraseña de mi cuenta?

En la informática se utiliza el término *phishing* que se refiere a un conjunto de técnicas que buscan engañar a una víctima haciéndose pasar por una persona, empresa o servicio de confianza para manipularla y hacer que realice acciones que no debería realizar, como revelar información confidencial o hacer clic en un enlace.

Para evitar situaciones como la descrita o que te roben la contraseña, una de las formas para protegerse, en términos de ciberseguridad, es tener una contraseña segura. Para establecer una contraseña con cierta seguridad, se pide que tenga al menos ocho caracteres, utilizando letras mayúsculas, minúsculas, números y símbolos. En esta progresión estudiarás la razón.



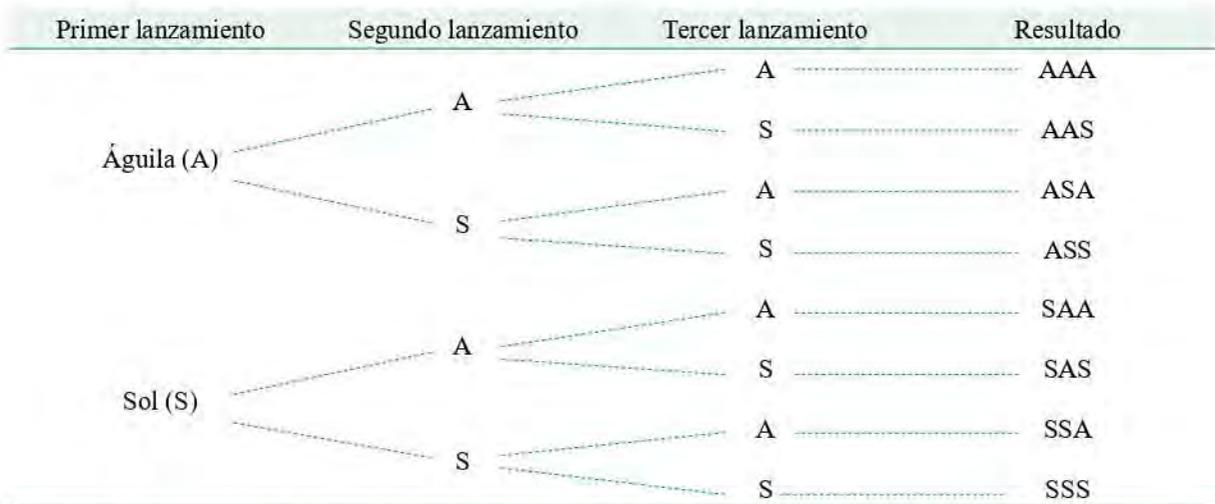
Puedes ampliar sobre este tema en: <https://es.wikipedia.org/wiki/Phishing>

En el artículo anterior se afirma que, con los recursos actuales, siempre es posible *hackear* la contraseña y que todo está en el tiempo que puede demorar; la cuestión es, pues, ponérsela difícil al *hacker*. Para darnos cuenta de ello puedes auxiliarte de las probabilidades.

Imagina que lanzas una moneda al aire tres veces. ¿Qué probabilidad hay de obtener sol, águila, sol en ese orden? Puedes confeccionar el siguiente esquema:



Para ampliar sobre este tema revisa: <https://www.adslzone.net/noticias/seguridad/seguridad-contrasena-hackeo-1023/>



El total de casos posibles es ocho y hay una sola variante en que se obtiene SAS, luego la probabilidad de que se obtenga ese resultado es $P(SAS) = 1/8 = 0.125$.

Actividad de aprendizaje 4.1

Ahora lanza la moneda cuatro veces.

1. Completa la siguiente tabla:
2. ¿Cuál es el total de casos posibles?

3. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengas AASS en ese orden?

4. Si fueras a elegir una contraseña para tu cuenta de WhatsApp con solo dos letras, A y S, para dificultar que te la descubran, ¿la harías de tres o cuatro caracteres? _____

Fundamenta tu respuesta: _____

	Lanzamientos				Resultado
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	
Águila (A)	A	A			
		S			
	S	A			
		S			
Sol (S)	A	A			
		S			
	S	A			
		S			

Así, la probabilidad de que, en un determinado arreglo de una cantidad de caracteres, ya sean letras, números o símbolos, se obtenga uno específico se hace menor cuando aumenta el número de arreglos a tener en cuenta y la cantidad de caracteres a considerar.

Por ejemplo, si lanzas un dado dos veces, ¿cuál será la probabilidad de obtener primero un 5 y después un 6? Puedes confeccionar un esquema como en el ejemplo de la moneda, inicialmente con los seis números del dado y a continuación por cada uno de esos números nuevamente los seis números posibles. Por cada uno de los seis posibles resultados del primer lanzamiento hay otros seis posibles resultados en el segundo lanzamiento. Por tanto, el total de resultados posibles es 36:

1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6

4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

Como este evento es equiprobable y el resultado 5-6 se obtiene una sola vez, la probabilidad de que la primera vez se obtenga un 5 y la segunda vez un 6 es:

$$P(5-6) = 1/36 \approx 0.028$$

En estadísticas y probabilidades se utilizan las llamadas técnicas de conteo que permiten determinar el número total de resultados posibles al hacer combinaciones dentro de un conjunto o conjuntos de objetos. Estas técnicas se emplean cuando es engorroso realizar manualmente la determinación del espacio muestral y saber dentro de él los casos que interesan del evento.

Dentro de las principales técnicas de conteo está el **principio multiplicativo**. Esta técnica se utiliza con frecuencia cuando existen sucesos que se manifiestan en forma ordenada o en secuencia. Si un evento E_1 puede ocurrir de N_1 formas y otro evento E_2 puede ocurrir de N_2 formas, estos eventos E_1 y E_2 pueden ocurrir de forma conjunta como el producto $N_1 \cdot N_2$ veces.

De forma general, la ocurrencia conjunta de los eventos E_1, E_2, E_3, \dots , puede ocurrir de $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \dots$ veces.

Así, por ejemplo, si para inaugurar una heladería hay 4 tipos de sabores de nieve (chocolate, fresa, vainilla y nuez) y como promoción, durante el primer día, se venden conos de tres bolas de nieve, en un cierto orden, pagando dos, ¿de cuántas formas posibles se pueden ofrecer los vasos de tres bolas?

Para cada una de las veces en que se ponga una bola de nieve hay cuatro posibilidades; por tanto, para el cono de tres bolas habrán $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ posibilidades.

Actividad de aprendizaje 4.2

Como parte de la promoción del ejemplo anterior, el dueño anuncia una urna en la que están las canicas señalizadas con todas las posibles formas, y:

1. Si se extrae una canica con la señal de tres bolas de nieve del mismo sabor solo pagas por una bola. ¿Qué probabilidad hay de extraer una canica para sólo pagar por una? _____

2. Si se extrae la canica que anuncia el cono de tres bolas de chocolate entonces no pagas nada. ¿Qué probabilidad hay de llevarte la nieve gratis? _____

3. Si los sabores de nieve no se repiten en el cono, ¿de cuántas formas posibles se pueden formar los vasos de nieve? En ese caso, el ofrecimiento gratis es para quien extraiga la correspondiente a chocolate, fresa y vainilla en ese orden. ¿Qué probabilidad tienes de llevarte la nieve gratis?

Otra técnica de conteo es el **principio sumativo**, que establece que si un evento A se puede realizar de " m " formas diferentes, y otro evento B se puede realizar de " n " formas diferentes, y si uno ocurre, simultáneamente no ocurre el otro, entonces, el número total de formas en que uno de los eventos puede ocurrir es igual a $m + n$.

En este caso, en vez de multiplicarse las alternativas para cada evento, se suman las varias formas en las que pueden ocurrir. Por ejemplo, si un estudiante tiene 4 camisas y 2 playeras, y solo puede usar una prenda a la vez, entonces el número total de formas en que puede vestirse es $4 + 2 = 6$.

Actividad de aprendizaje 4.3

Determina la cantidad posible de resultados en:

1. Vas a un OXXO® para comprar un refresco y ves que hay Coca Cola®, Pepsi®, Seven Up® y Fresca®, en tamaño grande, mediano y pequeño. ¿Cuántas opciones tienes para elegir el refresco que vas a comprar? _____
2. Quieres salir a dar un paseo caminando y vas a escoger el tipo de zapato que te vas a poner, entre un par de tenis alto flexible, un par de tenis bajo más robusto, o unas sandalias oscuras muy abiertas, unas sandalias oscuras cerradas y unas sandalias claras cerradas. ¿Cuántas opciones tienes para elegir? _____
3. Vas a salir de vacaciones con tu familia y tus padres te ofrecen la posibilidad de invitar a un amigo o una amiga que te acompañe. Tienes la posibilidad de elegir entre amigos vecinos, del aula, de la escuela, del equipo deportivo en que estás o del club de baile que frecuentas. ¿Cuántas opciones tienes para elegir quién te acompañará? _____
4. Para ir a una fiesta quieres seleccionar como vestirte, entre tres piezas superiores, dos inferiores y dos pares de zapatos. ¿De cuántas maneras puedes vestirte? _____

Actividad de aprendizaje 4.4

Volvamos al tema de la contraseña en tu celular. Hasta ahora has pensado en formarlas con cuatro caracteres, con las letras del alfabeto, mayúsculas y minúsculas, y los números del 0 al 9. Como el alfabeto tiene 27 letras, considerando las mayúsculas y minúsculas hay 54 posibilidades y con los 10 números, hacen un total de 64 posibilidades para cada signo de la contraseña. Entonces:

1. ¿Qué principios aplicarías para saber el total de casos posibles? _____
2. Calcula el total de casos posibles: _____
3. Si seleccionaste como contraseña la secuencia **r4A0**, ¿qué probabilidad hay de que se seleccione al azar esa contraseña? _____
4. Si una vez que selecciones un símbolo en cada uno de los caracteres no se repite en adelante ¿qué probabilidad hay de seleccionar esa misma secuencia **r4A0**? _____

Otras técnicas de conteo son las permutaciones y las combinaciones, las que se utilizan para calcular el número total de formas en que se pueden disponer los elementos de un conjunto o también, para seleccionar “ r ” elementos de un conjunto de “ n ” elementos.

Las **permutaciones** se utilizan cuando tiene importancia el orden para seleccionar un subconjunto de elementos dentro del total que tiene el conjunto, mientras que las combinaciones no tienen en cuenta el orden de los elementos elegidos.

Supón que tienes cuatro libros de Matemáticas: Aritmética (Ar), Álgebra (Al), Geometría (Ge) y Trigonometría (Tr) y quieres ordenarlos, en un estante, importando el orden en que los coloques. ¿De cuántas formas diferentes puedes ordenarlos? Como hay un solo ejemplar de cada libro, para el primer espacio tienes cuatro opciones, para el segundo tres, para el tercero dos y, finalmente, para el cuarto espacio quedaría uno.

En total, $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ posibilidades:

Ar-Al-Ge-Tr	Ar-Al-Tr-Ge	Ar-Ge-Al-Tr	Ar-Ge-Tr-Al	Ar-Tr-Al-Ge	Ar-Tr-Ge-Al
Al-Ar-Ge-Tr	Al-Ar-Tr-Ge	Al-Ge-Ar-Tr	Al-Ge-Tr-Ar	Al-Tr-Ar-Ge	Al-Tr-Ge-Ar
Ge-Ar-Al-Tr	Ge-Ar-Tr-Al	Ge-Al-Ar-Tr	Ge-Al-Tr-Ar	Ge-Tr-Ar-Al	Ge-Tr-Al-Ar
Tr-Ar-Al-Ge	Tr-Ar-Ge-Al	Tr-Al-Ar-Ge	Tr-Al-Ge-Ar	Tr-Ge-Ar-Al	Tr-Ge-Al-Ar

Dado un número natural n , el producto de todos los números naturales anteriores o iguales a él se define como el factorial de ese número y se denota por $n!$. Así, por ejemplo, el factorial de seis será $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ y $n! = n(n-1) \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

De igual forma, $1! = 1$ y por convención se adopta que $0! = 1$.

Por lo tanto, el resultado de esta permutación de cuatro elementos en grupos de cuatro se puede representar de la siguiente forma: $P_4^4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

El anterior, es un ejemplo de una permutación en la que ordenamos todos los elementos del conjunto; pero, si para un ordenamiento de esos cuatro libros solo dispones de tres espacios, entonces en cada grupo queda fuera uno y se obtienen también 24 posibilidades:

Ar-Al-Ge	Ar-Ge-Al	Ar-Ge-Tr	Ar-Tr-Ge	Ar-Al-Tr	Ar-Tr-Al
Al-Ar-Ge	Al-Ge-Ar	Al-Ar-Tr	Al-Tr-Ar	Al-Ge-Tr	Al-Tr-Ge
Ge-Ar-Al	Ge-Al-Ar	Ge-Ar-Tr	Ge-Tr-Ar	Ge-Al-Tr	Ge-Tr-Al
Tr-Ar-Al	Tr-Al-Ar	Tr-Al-Ge	Tr-Ge-Al	Tr-Ar-Ge	Tr-Ge-Ar

Aquí se han agrupado cuatro elementos en grupos de tres, teniendo en cuenta el orden, y los representamos por P_3^4 . Ahora, si dispones de solo dos espacios para el ordenamiento de los libros, entonces se tienen las siguientes posibilidades:

Ar-Al	Al-Ar	Ge-Ar	Tr-Ar
Ar-Ge	Al-Ge	Ge-Al	Tr-Al
Ar-Tr	Al-Tr	Ge-Tr	Tr-Ge

Así, resulta que los cuatro libros en grupos de dos se pueden ordenar de 12 formas diferentes y se representa por $P_2^4 = 12$.

En general, el número de agrupamientos de r elementos de un conjunto de n , teniendo en cuenta el orden, se obtiene por la expresión:

$$P_r^n = n(n-1)(n-2) \dots [n-(r-1)] = \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(r-1)](n-r)!}{(n-r)!}$$

Luego:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Puedes utilizar la anterior fórmula para calcular los resultados de los diferentes casos analizados del ordenamiento de los libros en las cuatro, tres y dos posiciones. En efecto, para colocar los libros en las cuatro posiciones: $P_4^4 = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = \frac{24}{1} = 24$ resultados posibles. Si se colocan los cuatro libros, en determinado orden, en tres y dos agrupaciones respectivamente, se obtienen $P_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$ y $P_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12$ agrupaciones posibles, como se obtuvo anteriormente.

En los casos considerados no existía la posibilidad de repetir un elemento del conjunto de libros.

Actividad de aprendizaje 4.5

Aplica los conocimientos adquiridos:

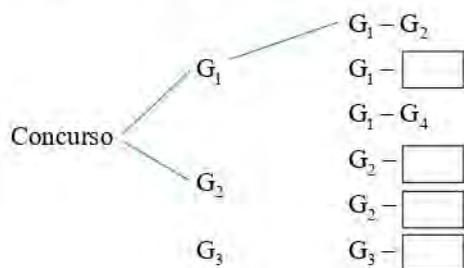
1. Para viajar desde Los Mochis hasta Culiacán existen 10 salidas diarias de camiones foráneos en diferentes horarios, por cada una de tus dos líneas de camiones foráneos preferidas. ¿De cuántas formas diferentes puedes viajar desde Los Mochis a Culiacán? _____
2. ¿De cuántas formas se pueden cubrir los cargos de presidente, vicepresidente y secretario de una organización, conociendo que hay ocho candidatos? _____
3. En una competencia estudiantil de fútbol participan seis equipos que representan diferentes escuelas preparatorias del estado.
 - a) ¿De cuántas formas diferentes puede quedar ordenada la tabla de posiciones finales al concluir la competencia? _____
 - b) ¿De cuántas formas diferentes pueden quedar ordenados los tres primeros lugares de la competencia? _____

Las **combinaciones**, como técnica de conteo, son arreglos en un conjunto de elementos que se utilizan cuando no tiene importancia el orden de los elementos; es decir, se refiere a la disposición de una parte de los elementos de un conjunto sin tener en cuenta el orden en que se arreglen.

Actividad de aprendizaje 4.6

Si en tu escuela hay 4 grupos que investigan sobre temas del medio ambiente, ¿de cuántas maneras se pueden seleccionar dos cualesquiera de ellos para que participen en un evento convocado por la UAS?

1. Si representas los 4 grupos por G_1, G_2, G_3 y G_4 , teniendo en cuenta que no importa el orden, completa el siguiente esquema:



- a) ¿Están todas las posibles agrupaciones representadas en el esquema? _____
Fundamenta tu respuesta: _____

- b) ¿Cuántas posibilidades hay en total? _____

2. Si todos los grupos están en igualdad de condiciones, ¿cuál es la probabilidad de que el grupo G_2 esté en la selección? _____

No siempre es factible o práctico mediante un esquema como el anterior, denominados diagramas de árbol, determinar todos los casos posibles para, por ejemplo, calcular la probabilidad de que alguno o algunos de los sucesos ocurra. Como en las permutaciones la siguiente expresión permite calcular el número de combinaciones de n elementos tomados en arreglos de r componentes y se denota por C_r^n .

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Por ejemplo, si el profesor de *Pensamiento Matemático I* de tu grupo quiere formar de una selección de 10 estudiantes, equipos de 5 para una actividad de aprendizaje, ¿de cuántas maneras se pueden formar los equipos?

$$C_5^{10} = \frac{10!}{(10-5)!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} = \frac{30240}{120} = 252$$

Por tanto, hay 252 maneras de formar los equipos.

La fórmula de las combinaciones se deduce a partir de la fórmula de las permutaciones, pues basta observar que cada $r!$ permutaciones dan lugar a una sola combinación, ya que no importa el orden. Así,

$$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Si, por ejemplo, en la colocación de los cuatro libros en arreglos de tres no cuenta el orden, los arreglos: Ar-Al-Ge, Al-Ar-Ge, Ge-Ar-Al, Ar-Ge-Al, Al-Ge-Ar y Ge-Al-Ar dan lugar a una sola combinación.

$$\text{Así, } C_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{4!}{1!3!} = 4$$

Ar-Al-Ge	Al-Ar-Ge	Ge-Ar-Al	Tr-Ar-Al
Ar-Ge-Al	Al-Ge-Ar	Ge-Al-Ar	Tr-Al-Ar
Ar-Al-Tr	Al-Ar-Tr	Ge-Ar-Tr	Tr-Ar-Ge
Ar-Tr-Al	Al-Tr-Ar	Ge-Tr-Ar	Tr-Ge-Ar
Ar-Ge-Tr	Al-Ge-Tr	Ge-Al-Tr	Tr-Al-Ge
Ar-Tr-Ge	Al-Tr-Ge	Ge-Tr-Al	Tr-Ge-Al

En efecto, como se muestra en la siguiente tabla, hay cuatro combinaciones posibles que se obtienen al dividir el número total de permutaciones, 24, por $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Actividad de aprendizaje 4.7

Completa el siguiente cuadro. ¿Cuál es la diferencia?

Diferencia entre permutaciones y combinaciones

Permutaciones: son los arreglos de los elementos de un conjunto en los que interesa la posición que ocupa cada uno de los elementos que integran el arreglo.

Combinaciones: son los arreglos de los elementos de un conjunto en los que interesa la posición que ocupa cada uno de los elementos que integran el arreglo.

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_r^n \neq C_r^n$$

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Para profundizar sobre los tipos de permutaciones y combinaciones, así como simular arreglos de ambas, puedes acudir a los siguientes códigos QR:



QR 4.1. Combinaciones y permutaciones.
Fuente: Parzibyte, 2023.



QR 4.2. Calculadora de permutaciones.
Fuente: Parzibyte, 2023.



QR 4.3. Calculadora de combinaciones.
Fuente: Parzibyte, 2023.

Actividad de aprendizaje 4.8.

Utiliza alguna de las aplicaciones anteriores cuando lo consideres necesario.

1. Quieres preparar una ensalada de frutas con fresas, manzanas, peras y duraznos. ¿De cuántas formas se puede preparar la ensalada utilizando solo tres frutas diferentes? _____

2. Vas a postularte junto con 11 compañeros más para una selección de cinco integrantes que va a participar en un evento convocado en tu escuela, todos con iguales condiciones para ser elegido. ¿De cuántas formas se puede elegir el grupo de cinco? _____

a) ¿Qué probabilidad hay de que seas elegido? _____

3. Si se organiza un torneo de ajedrez en tu escuela con 10 participantes, ¿cuántos partidos se deben programar si cada participante deberá jugar con cada uno de los otros una sola vez? _____

4. En un concurso del club de baile juvenil se presentan cinco parejas. El concurso otorga \$200 al primer lugar y \$100 al segundo. ¿De cuántas formas se pueden repartir los premios de primer y segundo lugar? _____



Para resumir, ejercitar y profundizar sobre las técnicas de conteo, puedes consultar: <https://matemovil.com/permutaciones-y-combinaciones-ejercicios-resueltos/>

Actividad de aprendizaje 4.9

¿Estás en condiciones de preparar una contraseña que le dificulte lo más posible a un intruso descifrarla?

Ten en cuenta el alfabeto, tanto letras mayúsculas como minúsculas, los diez números del 0 al 9 y diez símbolos, por ejemplo #; \$; &; *; @; !; /; +; % y ?, (algunos sitios web o aplicaciones restringen algunos símbolos; supongamos que estos se admiten).

El número de arreglos puede ser tan grande como lo consideres, digamos nueve.

1. ¿Qué tipo de técnica de conteo utilizarías para calcular todos los arreglos posibles? _____

2. ¿Sería práctico hacer una tabla o diagrama de árbol, y cómo harías para obtenerlos? _____

3. Calcula todos los posibles arreglos: _____

4. Elabora una contraseña. Se recomienda usar una combinación de letras mayúsculas y minúsculas, números y símbolos para hacer una contraseña más segura. _____

5. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre tu contraseña? _____

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 4. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
En el análisis de una situación que lo requería diferencié cuándo utilizar las permutaciones y cuándo las combinaciones (M2-C1).			
Empleé aplicaciones informáticas para el cálculo de permutaciones y combinaciones (M3-C1).			
Utilicé la técnica de conteo apropiada para determinar la cantidad de casos posibles en un evento (M3-C3).			

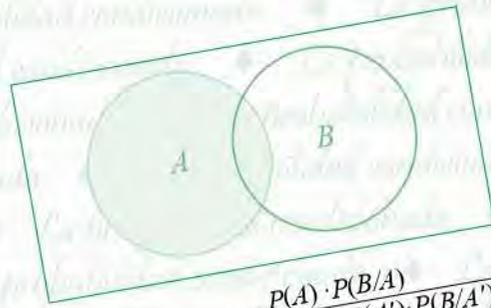
Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 4 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
En el análisis de una situación que lo requería diferenció cuándo utilizar las permutaciones y cuándo las combinaciones (M2-C1).			
Empleó aplicaciones informáticas para el cálculo de permutaciones y combinaciones (M3-C1).			
Utilizó la técnica de conteo apropiada para determinar la cantidad de casos posibles en un evento (M3-C3).			

Nombre y firma de quien coevalúa

La probabilidad condicionada



$$P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(A) \cdot P(B/A) + P(A') \cdot P(B/A')}$$

Progresión de aprendizaje 5

Observa cómo la probabilidad de un evento puede actualizarse cuando se obtiene más información al respecto y considera eventos excluyentes e independientes para emplearlos en la determinación de probabilidades condicionales. La introducción de la actualización de probabilidades se hace a través de simulaciones y sólo después se aborda el teorema de Bayes.

Metas de aprendizaje	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	A		
	C		
	H		

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

- En una escuela técnica donde se ofertan las carreras de inglés y computación, hay 20 alumnos inscritos en inglés y 43 inscritos en computación, dentro de ellos se sabe que hay 12 alumnos inscritos en ambos. Construye un diagrama de Venn para ilustrar la situación:

- Si se elige un alumno al azar:

- ¿Cuál será la probabilidad de que estudie inglés? _____
- ¿Cuál será la probabilidad de que estudie computación? _____
- ¿Cuál será la probabilidad de que estudie ambas carreras? _____
- ¿Cuál será la probabilidad de que estudie inglés si se sabe que estudia computación? _____
- ¿Podrías dar respuesta al inciso d? A continuación, aprenderás cómo.

5.1. Probabilidad condicional

En una escuela primaria en el grupo de segundo grado hay 38 alumnos; se sabe que 12 juegan fútbol, 14 practican taekwondo, 6 alumnos están inscritos en fútbol y a la vez en taekwondo. si se selecciona un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que practique fútbol si se sabe que practica taekwondo?

Ante esta nueva situación vamos a dar respuesta a la pregunta y, para ello, organicemos la información en un diagrama de Venn, de acuerdo a la Figura 5.1.

Sean:

A : El suceso “practica fútbol”.

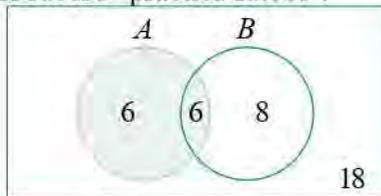


Figura 5.1. Diagrama de Venn.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2023).

B : El suceso “practica taekwondo”.

$$P(A) = \frac{12}{38} = \frac{6}{19}$$

$$P(B) = \frac{14}{38} = \frac{7}{19}$$

$$P(A \cap B) = \frac{6}{38} = \frac{3}{19}$$

El problema pide calcular la probabilidad de que un alumno practique fútbol, si ya se sabe que practica taekwondo, por lo que nos concentramos en los que practican taekwondo (14) y de ellos los que practican fútbol (6); lo representamos mediante la Figura 5.2:

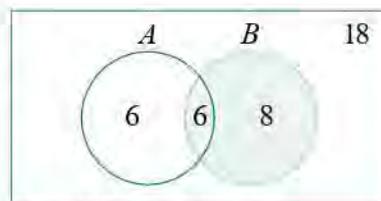


Figura 5.2 Diagrama de Venn.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2023).

$P(\text{Practica fútbol / Practica taekwondo})$, o bien $P(A/B)$ y considera lo siguiente:

Vamos a seleccionar un alumno que sabemos que practica taekwondo (información adicional), de forma que solo se consideran los alumnos que lo practican, excluyendo a aquellos que no.

Probabilidad de que practique taekwondo $P(B) = \frac{7}{19}$

Probabilidad de que practique fútbol y taekwondo $P(A \cap B) = \frac{3}{19}$

$$P(A/B) = \frac{P(\text{practica fútbol y taekwondo})}{P(\text{taekwondo})} = \frac{\frac{3}{19}}{\frac{7}{19}} = \frac{3}{7}$$

La probabilidad condicional o probabilidad condicionada

La probabilidad condicional o probabilidad condicionada, es la posibilidad de que ocurra un evento, al que denominamos A , como consecuencia de que ha tenido lugar otro evento, al que denominamos B . Para designar la probabilidad de un evento B , condicionada a otro evento A , escribimos:

$P(B/A) \rightarrow$ La probabilidad de B , dado que ya ocurrió A .

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad \text{si } P(A) > 0$$

Es decir, la probabilidad de que suceda B , dado que ha acontecido A , es igual a la probabilidad de que ocurra A y B , al mismo tiempo, entre la probabilidad de A .

$P(A/B) \rightarrow$ La probabilidad de A dado que ya ocurrió B .

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{si } P(B) > 0$$

En forma análoga, la probabilidad de que suceda A , dado que ha acontecido B , es igual a la probabilidad de que ocurra A y B , al mismo tiempo, entre la probabilidad de B .



QR 5.1. Probabilidad condicional: introducción.

Fuente: Parzibyte, 2023.

Actividad de aprendizaje 5.1.

¿Cómo identificas cuándo utilizar la fórmula de probabilidad condicional? _____

Ejemplo 5.1.

En primer grado los alumnos deben realizar por lo menos una actividad cocurricular fuera del horario de clases, y se sabe que de 300 alumnos: 40 están inscritos en teatro, 60 están inscritos en porristas, 20 están inscritos en porristas y en teatro a la vez; el resto realiza otra actividad cocurricular. ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno esté inscrito en porristas dado que está inscrito en teatro?

Sean:

A : El suceso “está inscrito en teatro”.

B : El suceso “está inscrito en porristas”.

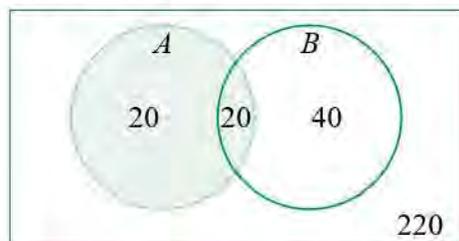


Figura 5.3. Diagrama de Venn.
Fuente: Elaboración propia.

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A) = \frac{40}{300} = \frac{2}{15}$$

$$P(B \cap A) = \frac{20}{300} = \frac{1}{15}$$

$$P(B/A) = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{2}{15}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

Ahora, ¿cuál es la probabilidad de que un alumno esté inscrito en teatro dado que está inscrito en porristas?

$$P(A/B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 5.2.

En un estudio realizado por alumnos de la facultad de medicina de la Universidad Autónoma de Sinaloa a personas de la tercera edad se encontró que el 33% padece diabetes, el 41% padece hipertensión y 17% padece ambas enfermedades, mientras que el resto de la población no padece ninguna de las dos enfermedades. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona padezca diabetes, dado que es hipertenso?

Sean D : “Padeecer diabetes”.

H : “Ser hipertenso”.

$$P(D/H) = \frac{P(D \cap H)}{P(H)} = \frac{0.17}{0.41} = 0.4146$$

La probabilidad de que una persona de la tercera edad padezca diabetes, dado que es hipertenso, es de 41.46%.

Actividad de aprendizaje 5.2

1. Con la siguiente información elabora un diagrama de Venn.

$$P(A) = 36\% \quad P(B) = 42\% \quad P(A \cap B) = 21\%$$

2. Determina: $P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} =$



Ejemplo 5.3

En la siguiente tabla se muestran las características de los pasajeros del vuelo BA2490 procedente de la ciudad de Culiacán con destino a Tijuana.

Categoría de vuelo	Hombre	Mujer	Niño	Total
Primera Clase	4	2	2	8
Clase ejecutiva	15	6	3	24
Clase económica	34	29	6	69
Total	53	37	11	101

Se seleccionó un pasajero al azar. Dado que el pasajero seleccionado aleatoriamente era un niño, ¿cuál es la probabilidad de que haya viajado en clase ejecutiva?

Sean: A : “Probabilidad de que sea pasajero de clase ejecutiva”.

B : “Probabilidad de que el pasajero sea niño”.

Se sabe que el pasajero seleccionado es niño, por lo que se busca $P(A/B)$

$$P(A) = \frac{24}{101}$$

$$P(B) = \frac{11}{101}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{101}$$

$$P(A/B) = \frac{\frac{3}{101}}{\frac{11}{101}} = \frac{303}{1111} = \frac{3}{11} = 0.2727$$



QR 5.2. Calculadora de probabilidad condicional.

Fuente: Parzibyte, 2023.

5.2. Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes

Dos o más eventos son mutuamente excluyentes si, al ocurrir uno de ellos, excluye la posibilidad de que ocurra el otro.

Ejemplo 5.4

Si se lanza una moneda.

Sean: A : “Que al caer muestre águila”.

B : “Que al caer muestre sello”.



Figura 5.4. Lanzamiento de una moneda.
Fotografía: Rolando Forneiro Rodríguez (Android, 2023).

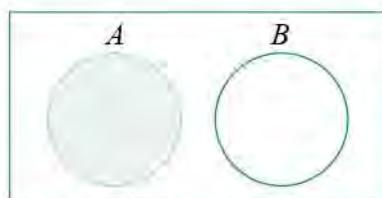


Figura 5.5. Diagrama de Venn.
Fuente: Elaboración propia.

Si sucede el evento A , no puede suceder el evento B de acuerdo a la Figura 5.5.

5.3. Probabilidad de eventos independientes

Dos eventos A y B son independientes si y solo si la probabilidad del evento B no está influida por el suceso del evento A o viceversa.

Ejemplo 5.5.

¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar dos dados, en los dos se obtenga número impar?

Evento A : Al lanzar el dado 1 caiga número impar (1, 3, 5), $P(A) = \frac{3}{6}$

Evento B : Al lanzar el dado 2 caiga número impar (1, 3, 5), $P(B) = \frac{3}{6}$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{36} = \frac{1}{4}$$

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

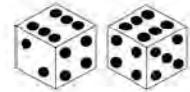


Figura 5.6 Lanzamiento de dos dados.
Ilustración: Mario Montijo Moreno (Blender, 2023).

Actividad de aprendizaje 5.3

1. Escribe un ejemplo de eventos que sean mutuamente excluyentes. _____
2. Calcula la probabilidad de que al lanzar dos monedas el resultado sea sol en ambas. _____

Con frecuencia es importante relacionar la probabilidad de ocurrencia de un suceso A dado que ocurrió otro evento B , con la probabilidad de que ocurra la situación contraria, es decir que suceda el evento B dado que ocurrió el evento A . Una relación matemática que describe esta situación es conocida como el **Teorema de Bayes**. Escanea el código QR de la derecha para saber más sobre este tema.

La expresión del teorema de Bayes, dado un suceso A condicionado a un suceso B está dada por

$$P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(A) \cdot P(B/A) + P(A') \cdot P(B/A')}$$

Donde A' significa la no ocurrencia de A o complemento de A (otras notaciones $A^c, \sim A, \bar{A}$).

En el estudio de temas de salud, una aplicación del teorema de Bayes puede ayudar a discernir la probabilidad de que una determinada situación sea encontrada en una persona o en un grupo de personas con una característica dada, tomando como condición las tasas globales en que esta se presenta y el predominio de dichas características en personas que las posean o que no las posean. Tal es el caso de las pruebas de embarazo para calcular la probabilidad de que una mujer esté realmente embarazada, dado que la prueba resulte positiva.

Por ejemplo, en una determinada población el índice histórico de mujeres embarazadas mayores de 40 años es del 5%. Una mujer con 42 años cree estar embarazada y antes de acudir al médico, para saber si lo está, utiliza una prueba de embarazo que tiene una sensibilidad del 99%, es decir, que da positivo el 99% de las veces cuando la mujer realmente está embarazada y con una especificidad del



QR 5.3. Teorema de Bayes: introducción.
Fuente: Parzibyte, 2023.

98%, es decir, que da negativo el 98% de las veces cuando la mujer no lo está. ¿Cuál es la probabilidad de que, al hacerse la prueba y obtener un resultado positivo esté realmente embarazada?

Considera A : “Mujer embarazada” y B : “Prueba de embarazo positiva”.

Entonces según el índice histórico, $P(A) = 5\%$ y $P(\bar{A}) = 95\%$.

Según la prueba utilizada, $P(B/A) = 99\%$ y $P(B/\bar{A}) = 2\%$ (especificidad es de un 98%).

Entonces,

$$\begin{aligned} P(A/B) &= \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(A) \cdot P(B/A) + P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A})} \\ &= \frac{(0.05)(0.99)}{(0.05)(0.99) + (0.95)(0.02)} \\ &= 72.26\% \end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad de estar realmente embarazada es alta.

El teorema de Bayes es aplicable para más de un evento condicionado; si se tienen A_1, A_2, \dots, A_n eventos mutuamente exclusivos tales que su unión es A y B otro evento, entonces, para cualquiera sea $i = 1, \dots, n$.

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B/A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)}$$

Actividad de aprendizaje 5.4

En el mes de diciembre Ramón y su familia viajaron al estado de Chihuahua a pasar las fiestas decembrinas con sus abuelos; en dicha fecha el clima es muy severo, se presentan lluvias, nieve y niebla y aumentan los índices de accidentes carreteros.

1. Las probabilidades simples del estado del clima en esa época son las siguientes:
 - a) Probabilidad de que llueva: 50%
 - b) Probabilidad de que nieve: 30%
 - c) Probabilidad de que haya niebla: 20%
2. Según estos posibles estados meteorológicos y la información estadística existente, la posibilidad de que ocurra un accidente vehicular son las siguientes:
 - a) Si llueve; la probabilidad de un accidente vehicular es del: 20%
 - b) Si nieva; la probabilidad de un accidente vehicular es del: 10%
 - c) Si hay niebla; la probabilidad de un accidente vehicular es del: 5%
3. Si bajo algunas de estas condiciones el vehículo de Ramón sufrió un pequeño accidente:
 - a) Calcula la probabilidad de que estuviera lloviendo cuando ocurrió el accidente vehicular.

Para ello, de acuerdo con el Teorema de Bayes, se multiplica la probabilidad simple de que llueva en Chihuahua, por la probabilidad que ocurra un accidente cuando esté lloviendo, para después dividir este resultado en la suma de las multiplicaciones de cada probabilidad condicional, como se muestra a continuación:

$$P(A/B) = \frac{0.50 \cdot 0.20}{(0.50 \cdot 0.20) + (0.30 \cdot 0.10) + (0.20 \cdot 0.05)} \approx 0.7142$$

La probabilidad de que estuviera lloviendo cuando ocurrió el accidente vehicular es aproximadamente del **71.42%**.

- b) Calcula la probabilidad de que estuviera nevando cuando ocurrió el accidente. _____

- c) Calcula la probabilidad de que hubiera niebla cuando ocurrió el accidente. _____

- d) Si ocurrió un accidente, ¿cuándo es más probable haya ocurrido: lloviendo, nevando? _____

- e) Si ocurrió un accidente, ¿cuándo es más probable haya ocurrido: nevando, con niebla? _____

Actividad de aprendizaje 5.5

- De una baraja de 48 cartas se extraen simultáneamente dos de ellas. Calcular la probabilidad de que:
 - Las dos sean copas.
 - Una sea copa y la otra espada.
- En una ciudad, el 30% de la población tiene el cabello castaño, el 35% tiene ojos castaños y el 20% tiene cabello y ojos castaños. Se escoge una persona al azar:
 - Si tiene el cabello castaño, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también ojos castaños?
 - Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga cabello castaño?
- En una clase de inglés hay 100 alumnos, de los cuales: 55 son hombres, 40 usan reloj, y 20 son hombres que usan reloj. Se selecciona al azar un alumno de dicho curso:
 - Si sabemos que el alumno seleccionado es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que use reloj?
 - Si sabemos que el alumno seleccionado no usa reloj, ¿qué probabilidad hay de que sea hombre?
- Una empresa en Sinaloa confecciona casacas a los equipos de beisbol del estado (Cañeros, Algodoneros, Tomateros y Venados) y en el mes de septiembre se realizó una producción de 10000 casacas, como sigue:

Equipo	En buen estado	Defectuosas	Total por equipo
Cañeros	2760	240	3000
Algodoneros	1370	130	1500
Tomateros	3192	308	3500
Venados	1795	205	2000
Total	9117	883	10000

Si se selecciona una al azar, determina la probabilidad de seleccionar:

- Una casaca defectuosa.
- Una casaca de los cañeros si se sabe que se seleccionó una casaca en buen estado.
- Una casaca defectuosa si se sabe que se seleccionó una casaca de los Tomateros.

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 5. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Identifiqué cuándo utilizar el Teorema de Bayes en la resolución de problemas cotidianos (M4-C2).			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 5 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Identificó cuándo utilizar el Teorema de Bayes en la resolución de problemas cotidianos (M4-C2).			

Nombre y firma de quien coevalúa

Recolección de datos estadísticos

Tema: Los adolescentes utilizan sus teléfonos móviles para...
Elabora al menos cinco preguntas cerradas y una abierta, ...

Preguntas cerradas:

1.1 ¿Con qué frecuencia utilizas tu teléfono móvil para enviar mensajes...

A) Varias veces al día

B) Varias veces a la semana

C) Ocasionalmente

D) Nunca

1.2. ¿Cuántas horas al día pasas en redes sociales...

A) Menos de 2 horas

B) 2-4 horas

Progresión de aprendizaje 6

Observa cómo la probabilidad de un evento puede actualizarse cuando se obtiene más información al respecto y considera eventos excluyentes e independientes para emplearlos en la determinación de probabilidades condicionales. La introducción de la actualización de probabilidades se hace a través de simulaciones y sólo después se aborda el teorema de Bayes.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			
M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

Imagina que trabajas en una empresa que desarrolla un nuevo medicamento para reducir la presión arterial en pacientes con hipertensión y, estás a cargo de garantizar la calidad de un lote de medicinas, antes de que se libere para su venta al público. Como verás, la estadística y la probabilidad juegan un papel crucial en la salud de la población, pues debes monitorear el control de calidad, hacer inferencias sobre la calidad de un lote, así como predecir los efectos secundarios.

Para asegurar el control de calidad, la aplicación de la estadística se da en el muestreo de lotes de medicamentos; como sabes, no es factible probar cada medicamento individualmente, es por ello que debes seleccionar una muestra representativa para verificar la calidad del lote. Por su parte, la probabilidad te ayuda a determinar el tamaño de la muestra necesario para obtener resultados significativos y confiables.

Luego, la estadística te permite realizar inferencias sobre la calidad del lote completo basándote en la muestra. Para ello, puedes utilizar técnicas estadísticas para calcular la probabilidad de que el resto del lote esté afectado por la misma tasa de defectuosos de la muestra, lo que permitirá la toma de decisiones sobre si debes desechar o mantener el lote. También, la probabilidad la aplicas al evaluar los posibles efectos secundarios de los medicamentos mediante el análisis de datos históricos y estudios estadísticos para determinar la probabilidad de que, ciertos efectos secundarios, ocurran en una población bajo tratamiento con ese medicamento.

Actividad de aprendizaje 6.1

Investigando la relación entre vivir solo y la depresión.

Un grupo de estudiantes de primer año de bachillerato visitó a sus abuelos para indagar sobre la depresión. Los resultados revelaron que aquellos que viven solos son más propensos a deprimirse, que aquellos que viven con otras personas.

1. ¿Qué variables sondearon los estudiantes? _____

2. ¿Qué tipo de variables son? _____

3. ¿Cómo las medirías? _____

4. ¿Cómo comprobarías si hay una relación entre vivir solo y la depresión? _____

Ahora, hablando de **probabilidad**, esta se refiere a la medida de la certeza o posibilidad de que ocurra un evento y se utiliza para predecir resultados en situaciones inciertas o aleatorias. Un ejemplo clásico es el experimento de lanzar un dado, en el que la probabilidad de obtener un número específico es $1/6$, ya que hay 6 caras equiprobables.

Por su parte, la **estadística** se enfoca en recopilar, organizar, analizar e interpretar datos para obtener conclusiones significativas. Utiliza técnicas estadísticas para sacar conclusiones sobre una población basándose en muestras para recopilar datos mediante encuestas aplicadas en estudios científicos, análisis de mercados y muchos otros campos. La estadística contribuye a entender la variabilidad de los datos, a tomar decisiones informadas y hacer inferencias sobre la población en general, a partir de los datos obtenidos de la muestra.

También, puedes obtener datos de **fuentes confiables** como el INEGI (Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Información), que recopila información mediante la aplicación de censos y encuestas. Usa la estadística para producir indicadores que proporcionen un panorama completo de diversos temas de México como demografía y sociedad; economía y sectores productivos; geografía y medio ambiente; además, gobierno, seguridad y justicia.

Por ejemplo, en la Tabla 6.1, en el tema de demografía y sociedad, la Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos en los hogares (ENIGH, 2022), reveló que el gasto corriente monetario promedio trimestral de las y los sinaloenses es de \$42,911.00, de los cuales, el rubro de alimentos, bebidas y tabaco representó el mayor gasto promedio (\$14,445.00); en contraste con el rubro de cuidados de la salud, el gasto promedio fue de \$1,424.00. Por lo que las y los sinaloenses gastamos más en alimentos, bebidas y tabaco que en el cuidado de la salud.

Rubros de gasto	Gasto promedio en pesos
Alimentos, bebidas y tabaco	\$14,445
Transporte y comunicaciones	\$9,732
Vivienda y servicios	\$3,940
Cuidados personales	\$3,486
Educación y esparcimiento	\$3,618
Limpieza y cuidados de la casa	\$2,674
Vestido y calzado	\$2,003
Transferencias de gasto	\$1,589
Cuidados de la salud	\$1,424
Total (gasto corriente monetario trimestral)	\$42,911.00

Tabla 6.1. Gasto corriente monetario promedio trimestral del año 2022 por hogar en Sinaloa, según grandes rubros del gasto en pesos.

Fuente: Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares (ENIGH) 2022. Nueva Serie. Disponible en: <https://www.inegi.org.mx/programas/enigh/nc/2022/>

En el rubro de alimentos, bebidas y tabaco de las 20 principales variables de gasto del 2022 la Tabla 6.2) nos muestra que los sinaloenses gastamos más en cuidados personales (\$2,663.00) y en electricidad y combustibles (\$2,640.00).

Rubros específicos del gasto	Gasto promedio en pesos	Rubros específicos del gasto	Gasto promedio en pesos
Cuidados personales	\$2,663	Vestido	\$1,374
Electricidad y combustibles	\$2,640	Transporte público	\$1,344
Educación	\$2,450	Leche y derivados	\$1,187
Alimentos fuera del hogar	\$2,411	Verduras	\$1,114
Carnes	\$2,268	Huevo	\$749
Comunicaciones	\$2,191	Alquileres brutos	\$700
Cereales	\$2,102	Esparcimiento	\$688
Cuidados de la casa	\$1,821	Otros gastos diversos	\$676
Adquisición de vehículos	\$1,639	Calzado y su reparación	\$630
Bebidas	\$1,475	Enseres domésticos	\$596

Tabla 6.2. Gasto corriente monetario promedio trimestral en los veinte principales rubros de gasto del año 2022 por hogar en Sinaloa, según grandes rubros del gasto en pesos.

Fuente: Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares (ENIGH) 2022, Nueva Serie. Disponible en: <https://www.inegi.org.mx/programas/enigh/nc/2022/>

Hay varias técnicas para recopilar los datos estadísticos, su elección depende del tipo de investigación. Por ejemplo, para la recopilación de los datos de la Tabla 6.1 y la Tabla 6.2 sobre el gasto corriente promedio trimestral de las y los sinaloenses, la técnica implementada fue la encuesta y el instrumento aplicado el cuestionario sobre gastos del hogar.

Una **encuesta** constituye una técnica de investigación que el investigador implementa para recopilar información a través de un cuestionario. Los resultados se pueden presentar en diversos formatos como trípticos, gráficos, tablas o informes escritos. El cuestionario se aplica para recolectar datos de diferentes tipos de variables estadísticas: cuantitativas que pueden ser nominales u ordinales, y cualitativas que se dividen en discretas y continuas.

Las **variables cualitativas** también son conocidas como variables categóricas, que representan características o cualidades no numéricas (no pueden medirse en términos numéricos). Se representan mediante etiquetas expresadas en palabras o símbolos y, con ellas, se puede calcular la moda, en el caso de la mediana solo para variables ordinales. Estas variables se dividen en dos tipos: las nominales y las ordinales.

Las **variables nominales** representan distintas categorías sin un orden inherente. Por ejemplo, el color de los ojos (negro, café, ámbar, avellana, verde, azul), el género (hombre, mujer, no binario), el tipo de sangre (A+, A-, B+, B-, AB+, AB-, O+, O-). No existe una jerarquía entre las categorías. Las **variables ordinales** son atributos o cualidades que representan categorías que tienen un orden o jerarquía intrínseca. Por ejemplo, el nivel educativo (primaria, secundaria y universidad), la escala de satisfacción de una serie de televisión (muy mala, mala, regular, buena, muy buena y excelente) o el nivel de acuerdo o desacuerdo que tienes con el reglamento escolar (totalmente en desacuerdo, en desacuerdo, neutral, de acuerdo y totalmente de acuerdo).



QR 6.1. Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares (ENIGH) 2022. Cuestionario de gastos del hogar. Fuente: Parzibyte, 2023.

Actividad de aprendizaje 6.2

Variables cualitativas. Identifica si las siguientes variables cualitativas son nominales u ordinales. Escribe (N) o (O) según corresponda.

- | | | | |
|------------------------|-------|--|-------|
| a) Raza de gato | _____ | g) Color de ropa preferido | _____ |
| b) Estado civil | _____ | h) Número de celular | _____ |
| c) Preferencia musical | _____ | i) Nivel socioeconómico | _____ |
| d) Código postal | _____ | j) Grado del dolor de cabeza | _____ |
| e) Tipo de transporte | _____ | k) Nivel de atención en un restaurante | _____ |
| f) Marca de automóvil | _____ | l) Clasificación de tallas | _____ |

Las **variables cuantitativas** se expresan mediante cantidades numéricas con las que puedes realizar operaciones matemáticas como la suma, la resta, la multiplicación y la división para calcular la media, la mediana, la moda y otras medidas estadísticas. Estas variables se dividen en dos tipos: las variables cuantitativas discretas y las variables cuantitativas continuas.

Las **variables cuantitativas discretas** asumen un número contable de valores. Por ejemplo, el número de hijos, la cantidad de automóviles en un estacionamiento o el número de estudiantes en una clase. Estas variables toman valores enteros y se cuentan en unidades individuales.

Las **variables cuantitativas continuas** pueden tomar cualquier valor en un intervalo. Ejemplos comunes son la altura, el peso, la temperatura o la cantidad de dinero. Estas variables pueden tener infinitos valores posibles dentro de un intervalo y se representan generalmente mediante números reales.

Actividad de aprendizaje 6.3

Variables cuantitativas. Escribe una (D) o una (C) según corresponda. Identifica si las siguientes variables cuantitativas son discretas o continuas.

- | | | | |
|-------------------------------------|-------|-------------------------------|-------|
| a) Pares de zapato por persona | _____ | g) Velocidad de un coche | _____ |
| b) Ancho de una casa | _____ | h) Distancia recorrida al día | _____ |
| c) Costo de un desayuno | _____ | i) Habitantes de una casa | _____ |
| d) Cantidad de mascotas en el hogar | _____ | j) Sueldo de un profesor | _____ |
| e) Duración de tu canción preferida | _____ | k) Horas de sueño | _____ |
| f) Cantidad de sal que consumes | _____ | l) Automóviles vendidos | _____ |

Cuando te enfrentes a una situación, es fundamental distinguir si una variable es cuantitativa (discreta o continua) o cualitativa (ordinal o nominal). Al emprender una investigación, definir la variable y su tipo es un factor crucial para el manejo de datos. En estadística, tener claro qué estás estudiando es esencial y la variable es el elemento que te proporciona esa información clave.

Actividad de aprendizaje 6.4

Variables cualitativas y cuantitativas. En las siguientes situaciones identifica la variable y determina su tipo: si es cuantitativa discreta, cuantitativa continua, cualitativa ordinal o cualitativa nominal.

1. Se realizará un estudio sobre el uso de energías renovables en hogares. Se llevará a cabo un censo de paneles solares instalados en viviendas para evaluar la adopción y eficacia de estas fuentes alternativas. _____

- Un estudio detalla el incremento de casos de estrés en la población laboral. Los datos recabados muestran un aumento del 35% en comparación con el año anterior. _____
- Un almacén de productos electrónicos está llevando a cabo un inventario, clasificando los dispositivos por marcas. _____
- El campo de golf local está elaborando una tabla con los puntajes de un torneo de 18 hoyos, indicando las puntuaciones de cada golfista en cada hoyo del recorrido. _____
- Un fisioterapeuta está monitoreando la movilidad de un paciente postoperatorio para otorgarle el alta cuando recupere un cierto nivel de movimiento. _____

Al estudiar una problemática o situación de interés, puedes hacerlo mediante un censo, como el INEGI, al llevar a cabo el censo poblacional, debido a que necesita información detallada y exhaustiva de toda la población; sin embargo, debido al costo que esto implica, puedes recurrir a la selección de una muestra de la población. La población se refiere al conjunto completo de elementos que se busca investigar o analizar. Por otro lado, la muestra es una parte cuidadosamente seleccionada de la población, que representa sus características principales. Como lo verás más adelante, la muestra la puedes seleccionar por medio de un muestreo probabilístico o no probabilístico.

Actividad de aprendizaje 6.5

Diseño de un cuestionario y recolección de datos.

En el cuestionario de gasto del hogar de la ENIGH, de los apartados 1.1. Limpieza y cuidados de la casa (páginas 4-5), 1.2. Cuidados personales (páginas 9-10) y 1.3. Educación, Cultura y Recreación (páginas 14-16) identifica las variables según su tipo y a partir de ellas, el grupo debe elaborar su propio instrumento para la recolección de datos sobre los gastos del hogar; luego crear un formulario de Google y cada uno lo aplica a quién lleve el gasto en su casa.



QR 6.2. Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares (ENIGH, 2022). Cuestionario de gastos del hogar. Fuente: Parzibyte, 2023.



Figura 6.1. Hoja de cálculo de Google. Fuente: Disponible en: <https://docs.google.com/spreadsheets/>

La información recolectada mediante el cuestionario de gasto del hogar, puedes representarla mediante gráficas según el tipo de variable y también en tablas. Si aplicas el cuestionario a través del formulario de Google, este te da la información en gráficas; si lo haces manualmente, debes usar hojas de cálculo de Excel, de Google o algún software estadístico.

Actividad de aprendizaje 6.6

- Del cuestionario diseñado elige tres preguntas, las que consideres de mayor importancia para mostrar sus resultados.

Preguntas elegidas:

- _____
- _____
- _____

2. Sobre las preguntas seleccionadas:

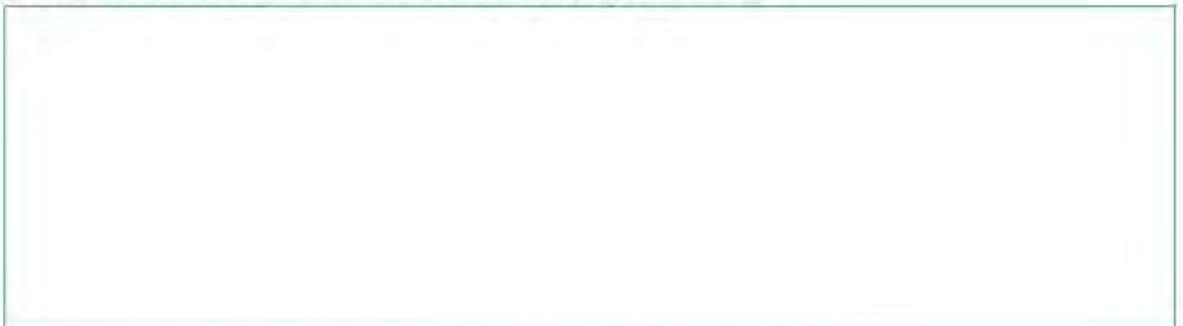
a) Dibuja la gráfica que corresponda a la variable de cada pregunta elegida.



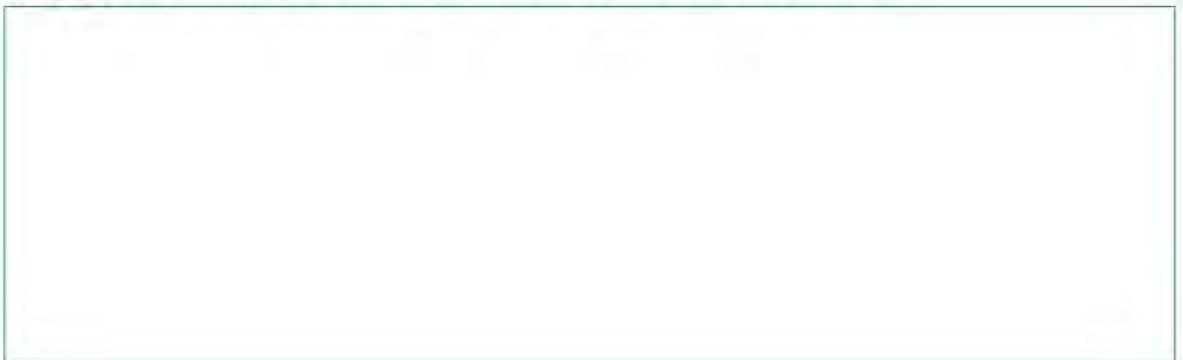
b) ¿Qué tipo de variable se describe en cada gráfica dibujada?



c) Calcula la media, mediana o moda según el tipo de variable.



d) ¿Qué conclusiones deduces de las medidas de resumen calculadas?



AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: _____ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 6. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Calculé la media, mediana o moda según el tipo de variable (M1-C1).			
Diferencié entre los tipos de variables cualitativas y cuantitativas (M1-C2).			
Compartí mis propuestas sobre el diseño de cuestionarios para recolectar información de una situación de interés (M2-C4).			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 6 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Calculó la media, mediana o moda según el tipo de variable (M1-C1).			
Diferenció entre los tipos de variables cualitativas y cuantitativas (M1-C2).			
Compartió sus propuestas sobre el diseño de cuestionarios para recolectar información de una situación de interés (M2-C4).			

Nombre y firma de quien coevalúa

Representación de la información



Figura 7.10. Goles anotados.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

Progresión de aprendizaje 7

Analiza datos categóricos y cuantitativos de alguna problemática o situación de interés para el estudiantado, a través de algunas de sus representaciones gráficas más sencillas como las gráficas de barras (variables cualitativas) o gráficos de puntos e histogramas (variables cuantitativas).

Metas de aprendizaje	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A		
	C		
	H		
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del Pensamiento Matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	A		
	C		
	H		
M2-C2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.	A		
	C		
	H		

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

En los deportes generalmente se recaban, organizan, analizan e interpretan datos relativos al rendimiento de los jugadores o equipo con el objetivo de evaluar el desempeño durante la temporada. A través de la cuantificación y el ordenamiento de los datos se intenta explicar los resultados, por lo que resulta una herramienta de suma utilidad para tomar decisiones basadas en la evidencia y proporciona instrumentos para la mejora en el entrenamiento y en la competencia.

En la Liga Mexicana del Pacífico (LMP) se obtuvieron los resultados que aparecen en la Tabla 7.1, durante la temporada 2022-2023.

Equipo	Juegos jugados	Juegos ganados	Juegos perdidos
Algodoneros de Guasave	68	36	32
Tomateros de Culiacán	68	26	42
Venados de Mazatlán	68	33	35
Mayos de Navojoa	68	31	37
Yaquis de Obregón	68	38	30
Naranjeros de Hermosillo	68	43	25
Cañeros de Los Mochis	68	41	27
Charros de Jalisco	68	29	39
Sultanes de Monterrey	68	32	36
Águilas de Mexicali	68	31	37

Tabla 7.1. Frecuencia de juegos de beisbol jugados en la LMP.

Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Liga_Mexicana_del_Pac%C3%ADfico_2022-23

1. Calcula el promedio (media) de los juegos ganados de los equipos. _____
2. ¿Qué valores se repiten en los datos de juegos ganados y perdidos? _____
3. ¿Qué tipo de análisis representan los datos anteriores? ¿Cualitativo o cuantitativo? _____
Argumenta tu respuesta: _____
4. Observa la Figura 7.1 y analiza la información que se solicita:



Figura 7.1. Resultados de juegos ganados y juegos perdidos de la LMP 2022-2023.
Fuente: Elaboración propia, con base en: https://es.wikipedia.org/wiki/Liga_Mexicana_del_Pac%C3%ADfico_2022-23 (Excel, 2023).

- a) ¿Qué información te muestra la gráfica presentada, y qué tipo de gráfico es? _____
- b) ¿Qué deduces con base en los datos presentados de la gráfica anterior? _____

Rendimiento de la temporada 2022-2023

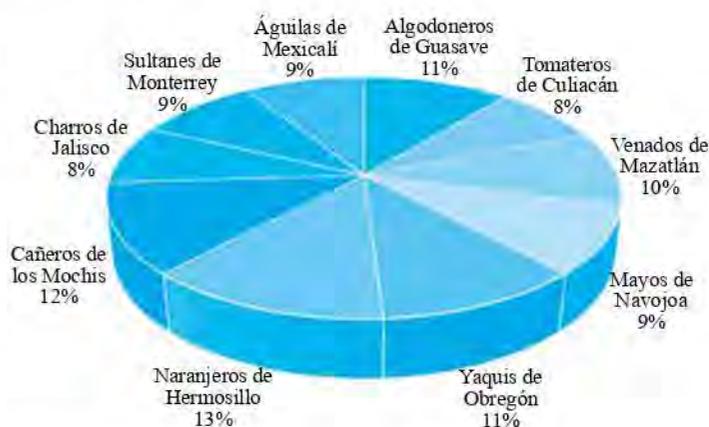


Figura 7.2. Rendimiento de la temporada 2022-2023 en la LMP.
Fuente: Elaboración propia, con base en: https://es.wikipedia.org/wiki/Liga_Mexicana_del_Pac%C3%ADfico_2022-23 (Excel, 2023).

5. A la vista de los datos presentados de la gráfica de la Figura 7.2, ¿qué deduces? _____
6. ¿Qué tipo de gráfico es? _____

De acuerdo al análisis realizado en la evaluación diagnóstica, ¿en qué piensas que te pueden ayudar las gráficas en tu vida diaria? _____



Figura 7.3. Tipos de gráficos.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2023).

Las personas, a lo largo de su vida, toman decisiones importantes relacionadas con las actividades que desempeñan día a día, por ello el pensamiento estadístico ha cobrado cada vez más importancia y el uso de gráficas para analizar y visualizar información es cada vez más frecuente, ya que te facilitan la comunicación y la visualización de los datos y son utilizadas como una herramienta en el proceso de análisis.

Existen diversos tipos de gráficas estadísticas que se pueden crear como se muestra en la Figura 7.3), dependiendo de cómo tengas organizada tu información y tipo de variable de estudio; ello te permitirá analizar, observar y verificar algunas tendencias que presenten los datos.

7.1. Gráfica de barras simple, barra doble y circulares

Las gráficas de barras se usan para organizar y presentar datos diversos y pueden ser horizontales o verticales. Se utilizan principalmente, para representar variables cualitativas como se muestra en las Figuras 7.4 y 7.5.

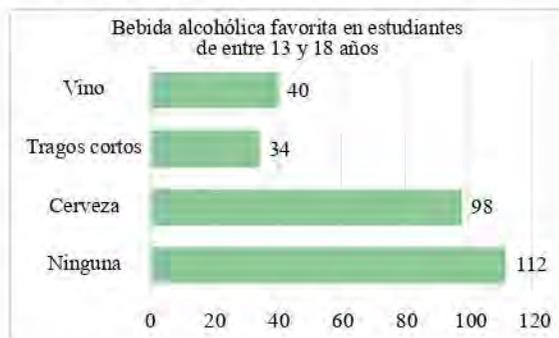


Figura 7.4. Gráfica de barra simple.

Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023)



Figura 7.5. Gráfica de barra doble.

Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023)

Por ejemplo, la Tabla 7.2 se obtuvo de una investigación para conocer las 10 cuentas de Instagram con más seguidores en el 2023, y en la Figura 7.6, se muestra mediante una gráfica de barras.

Cuenta	Seguidores (millones) 2023	Seguidores (millones) 2022
Instagram	658	569
Cristiano Ronaldo	607	500
Lionel Messi	488	376
Selena Gomez	430	357
Kylie Jenner	400	372
Dwayne Johnson	391	348
Ariana Grande	380	340
Kim Kardashian	364	333
Beyoncé	317	257
Khloé Kardashian	312	243

Tabla 7.2. Cuentas de Instagram con más seguidores.

Fuente: Elaboración propia, con base en: <https://www.ayudacuentas.com/instagram/cuentas-con-mas-seguidores/> y <https://www.merca20.com/los-mas-seguidos-instagram-2022/> (Word, 2023). (Word, 2023.)

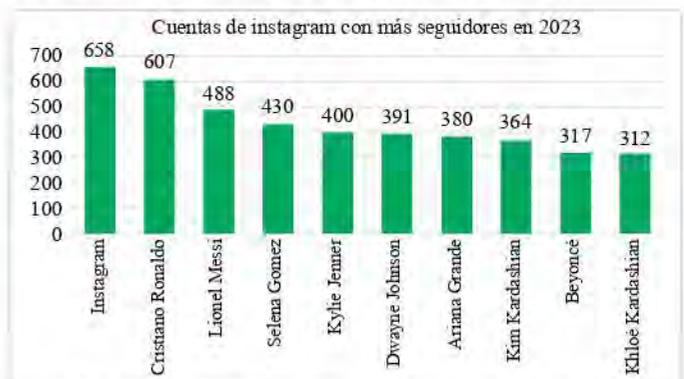


Figura 7.6. Cuentas de Instagram con más seguidores en 2023.

Fuente: Elaboración propia, con base en AyudaCuentas.com (Excel, 2023).

Las gráficas de barra doble son similares a las gráficas de barras simples, pero en estas, se grafican los datos de dos variables de estudio por cada valor de la categoría utilizando barras adyacentes para comparar las cantidades entre las dos categorías. Por ejemplo, la Tabla 7.2 muestra las cuentas de Instagram con más seguidores tanto en el 2022 como en el 2023, a partir de la cual puedes realizar una gráfica de barra doble para representar los datos como se muestra en la Figura 7.7. El gráfico de doble barra permite observar, por ejemplo, que la comparación de las cuentas de Instagram en 2022 y 2023 muestra una ligera diferencia entre Kylie Jenner y Selena Gómez, estando Kylie Jenner en la cuarta posición en 2023, a diferencia del 2022, año en el que ocupó la cuarta posición Selena Gómez, por un margen de 30 millones. ¿Podrías hacer otra comparación extraída de esta tabla?

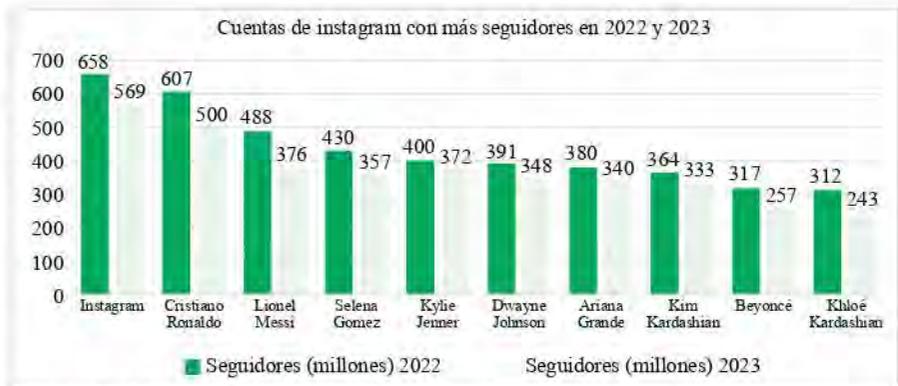


Figura 7.7. Cuentas de Instagram con más seguidores en 2022 y 2023.

Fuentes: Elaboración propia, con base en: <https://www.ayudacuentas.com/instagram/cuentas-con-mas-seguidores/> y <https://www.merca20.com/los-mas-seguidos-instagram-2022/> (Excel, 2023).

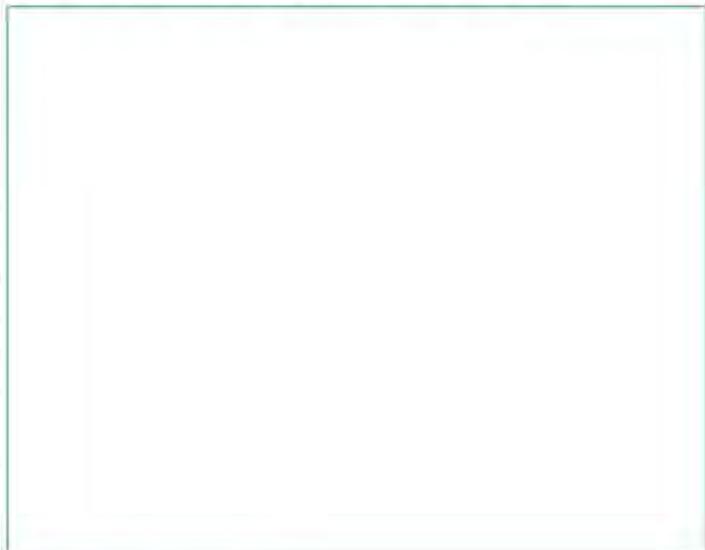
Actividad de aprendizaje 7.1.

1. Elabora en el recuadro blanco un gráfico de doble barras con los datos obtenidos de una investigación sobre las carreras más demandadas en la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) en los periodos 2022-2023 y 2023-2024. Apóyate en la Tabla 7.3.

Carreras con más demanda en la UNAM	2023-2024	2022-2023
Medicina	23,153	31,213
Derecho	13,993	23,313
Psicología	13,029	21,538
Administración	9,058	17,266
Arquitectura	7,729	10,650
Cirujano dentista	7,550	9,303
Contaduría	7,446	13,390
Enfermería	6,980	7,883
Pedagogía	6,427	9,394
Medicina veterinaria y zootecnia	5,889	8,006

Tabla 7.3. Carreras con más demandada en la UNAM.

Fuente: Elaboración propia con base en: <https://blog.unitips.mx/carreras-mas-demandadas-de-la-unam> y <https://oferta.unam.mx> (Word, 2023).



2. ¿Qué conclusiones puedes observar de la gráfica elaborada? _____

¿Qué es un gráfico circular? Un gráfico circular es un diagrama que muestra los datos en sectores fáciles de entender. Cada sector representa una categoría de datos y el tamaño es proporcional a la cantidad que representa cada valor que toma la variable (se te sugiere usar porcentajes).



Practicando. Para elaborar un gráfico circular puedes usar una hoja de cálculo o a lápiz y papel, como se indica en el siguiente enlace: <https://es.wikihow.com/hacer-un-gr%C3%A1fico-circular>

Actividad de aprendizaje 7.2

Con los datos obtenidos de la investigación sobre las carreras más demandadas en la UNAM en el período 2023-2024 que aparecen en la Tabla 7.3 elabora un gráfico circular con Microsoft Excel o a lápiz y papel:

1. Calcula el total de la demanda de carreras y el porcentaje que representó la cantidad de cada carrera.
2. En una hoja de cálculo de Excel escribe la etiqueta de cada dato en la columna de la izquierda y anota los datos porcentuales en la fila del costado.
3. En insertar haz clic en la opción “Gráficos” y luego en “Gráfico circular” y elige el estilo que deseas que tenga el gráfico. Debes obtener un gráfico como el que aparece en la Figura 7.8.

Carreras demandadas (%)

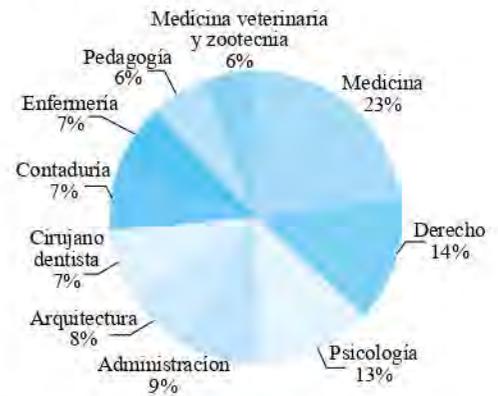


Figura 7.8. Gráfico circular o de pastel.

Fuente: Elaboración propia, con base en: <https://blog.unitips.mx/carreras-mas-demandadas-de-la-unam> (Excel, 2023).

7.2. Gráfico de puntos e histograma

Un gráfico de puntos es útil para datos cuantitativos. Este se representa sobre una línea horizontal organizando del menor de los datos hasta el mayor, y apilando los puntos hacia arriba uno del otro en los valores repetidos.

Supón que un comentarista de deportes analizó el desempeño de la Liga MX Varonil, temporada de clausura 22-23, en el que participaron 18 equipos y cada uno jugó 34 partidos, en ambas clausuras. En correspondencia, elaboró un gráfico de puntos como se muestra en la gráfica de la Figura 7.9 con el número de goles a favor (GF) anotados, utilizando los siguientes datos:

$$GF = \{46, 60, 53, 55, 62, 40, 50, 41, 48, 34, 51, 37, 48, 48, 28, 27, 37, 39\}$$

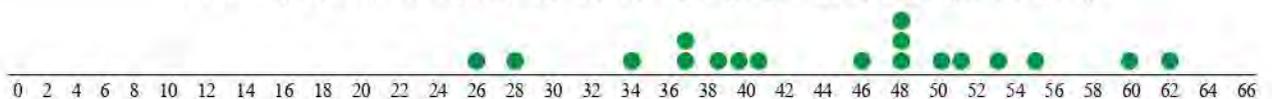


Figura 7.9. Goles a favor.

Fuente: Elaboración propia, con base en: <https://www.mediotiempo.com/futbol/liga-mx/tabla-general/385-2022> (Excel, 2023).

Observa en la gráfica anterior que los datos presentan mucha dispersión y, hay valores sin frecuencia, por lo que es más apropiado como gráfico un **histograma** para crearlo debes realizar los siguientes pasos:

Paso 1. Determina el Rango (R) = Valor _{máximo} - Valor _{mínimo} = $62 - 27 = 35$.

Paso 2. Determina el número de intervalos que se denota con la letra k . Cálculalo con la \sqrt{n} , en donde n es el número de la muestra. $\sqrt{18} = 4.24$, se redondea a 4.

Paso 3. Determina la amplitud de los intervalos que se denota con la letra i , con la fórmula siguiente: $i = \frac{R}{k}$; por lo que $i = \frac{35}{4}$, redondea a 9 unidades (Recuerda que siempre se debe cumplir

la siguiente condición, $k \cdot i > R$). Así, para el primer intervalo, el límite inferior (dato mínimo igual a 27) le sumas 9 y dará el límite superior que es $36 = 27 + 9$; es decir, el primer intervalo es $[27, 36)$. De manera análoga construye los demás intervalos: $[36, 45)$, $[45, 54)$ y $[54, 63)$.

Paso 4. Organiza los datos por intervalos. Cuenta los datos que hay en cada intervalo y con ellos, obtén la frecuencia absoluta. El corchete al inicio del primer intervalo $[27 - 36)$ indica que ahí contarás los datos que son mayores o iguales a 27 (límite inferior) y menores que 36 (límite superior), como en la Tabla 7.4.

	Intervalos	Conteo	Frecuencia absoluta
A partir del 27 hasta antes del 36 →	$[27, 36)$	III	3
A partir del 36 hasta antes del 45 →	$[36, 45)$	IIII	5
A partir del 45 hasta antes del 54 →	$[45, 54)$	IIII II	7
A partir del 54 hasta antes del 63 →	$[54, 63)$	III	3

Tabla 7.4. Distribución de frecuencias agrupadas de goles a favor en la Liga MX temporada 2022-2023.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2023).

Paso 5. Construye el histograma. En el eje X (abscisas) cada una de las barras tiene la amplitud del intervalo y en el eje Y (ordenadas), la frecuencia absoluta. Obsérvalo en la Figura 7.10 de la derecha.



Figura 7.10. Goles anotados.

Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

- ¿Qué podría concluir el comentarista de deportes? _____

Por tanto, observar el histograma nos ayuda a analizar mejor las variables cuantitativas en datos agrupados. Se observa el centro, la extensión y la forma del conjunto de datos, así como los valores atípicos o extremos, para verificar si hay posibles errores o problemas en los datos.

7.3 Polígono de frecuencias

Un polígono de frecuencias se construye a partir de un histograma. Para ello, debes unir los puntos medios de cada intervalo en el histograma (marca de clase, que es el promedio de cada intervalo).

Cálculo de la marca de clase	Intervalos	Marca de clase	Frecuencia absoluta
$\frac{27 + 36}{2} = 31.5 \rightarrow$	$[27, 36)$	31.5	3
$\frac{36 + 45}{2} = 40.5 \rightarrow$	$[36, 45)$	40.5	5
$\frac{45 + 54}{2} = 49.5 \rightarrow$	$[45, 54)$	49.5	7
$\frac{54 + 63}{2} = 58.5 \rightarrow$	$[54, 63)$	58.5	3

Tabla 7.5. Distribución de frecuencias agrupadas con marcas de clase.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2023).

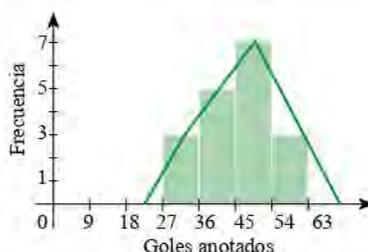
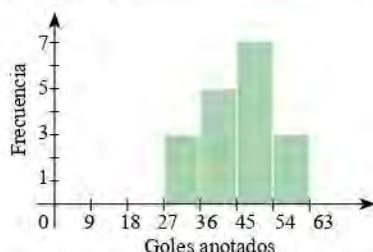


Figura 7.11. Proceso de construcción de un polígono de frecuencias a partir del histograma.

Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023)

Actividad de aprendizaje 7.3

1. Pregunta a 20 alumnos de la clase su estatura en centímetros y elabora: el gráfico de puntos, histograma y polígono de frecuencias.

2. Argumenta al final el comportamiento de dichas gráficas: _____

Actividad de aprendizaje 7.4

Gráfico de puntos, histograma y polígono de frecuencias. A continuación, se muestra el puntaje obtenido en 20 reactivos por 40 alumnos de un aula en el último examen bimestral en Pensamiento Matemático I.

10, 15, 11, 08, 12, 10, 13, 10, 12, 10, 12, 17, 10, 12, 11, 14, 15, 20, 10, 12, 10, 20,
14, 13, 05, 16, 05, 05, 14, 18, 07, 05, 12, 11, 02, 04, 14, 18, 16, 17.

1. Crea un gráfico de puntos, un histograma y un polígono de frecuencias en uno de los dos softwares de tu interés.



QR 7.1. Cómo crear gráficos en Canva.
Fuente: Parzibyte, 2023.



QR 7.2. Cómo crear un gráfico de puntos.
Fuente: Parzibyte, 2023.

2. Toma una captura de pantalla de cada gráfica e insértalos en una hoja de Word o dibújalos, luego compáralos.



3. ¿Qué puedes decir de las frecuencias de las calificaciones? _____

4. ¿Observas alguna regularidad estadística en las frecuencias de las calificaciones? _____

Al analizar los datos en las representaciones gráficas determinadas formas en su comportamiento pueden indicar una regularidad estadística sobre dichos datos, misma que se utiliza para describirlos o analizar en qué medida los datos analizados se asemejan o difieren entre sí.

7.4 Tendencias observables

Las tablas y gráficas estadísticas permiten el análisis y facilitan la comprensión de la información. A través de estas herramientas visuales es posible identificar patrones y comportamientos específicos conocidos como tendencias observables. En este contexto, se distinguen tres grupos fundamentales de estas: tendencia estadística, tendencia central y tendencia de dispersión de los datos.

Tendencia estadística. Es la dirección o el patrón que presentan los datos al graficarlos, ya sea que provengan de una o más variables. Esta tendencia se clasifica como ascendente, descendente o estacionaria.

Algunos ejemplos son:

- Si un puesto de esquite registra un crecimiento constante en sus ventas en los meses de enero a mayo de 2023, eso representa una tendencia estadística ascendente.



Figura 7.12. Ventas, en miles de pesos.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

- Si de las 18:00 a las 23:00 horas del 8 de enero de 2024, los datos climáticos muestran una disminución gradual de la temperatura en Culiacán, eso indica una tendencia estadística descendente.

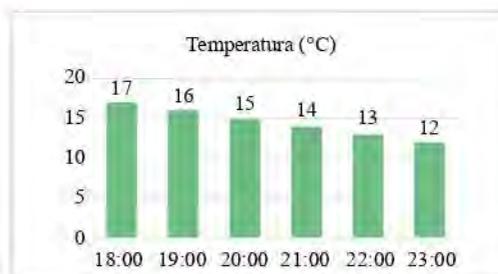


Figura 7.13. Temperatura (°C)
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

- Si el número de pares de zapatos que tienen las estudiantes de un grupo de primer grado de la Facultad de Medicina muestran un incremento o decremento similar, eso revela una tendencia estadística estacionaria.

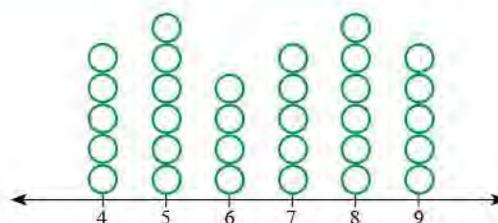


Figura 7.14. Pares de zapatos.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

Tendencia central. Se refiere al valor de referencia que representa a la mayoría de los datos de un conjunto. Se emplean tres medidas principales para identificarla: la media aritmética, la mediana y la moda. La mediana te indica el punto central de los datos y como se concentran éstos a su alrededor. La mediana te muestra el punto central de los datos sólo si éstos están ordenados. La moda te indica el dato o los datos con mayor frecuencia del conjunto de datos.

La gráfica de la derecha, muestra el número de televisores por hogar en un conjunto habitacional privado de 15 casas. En él, se observa que la mediana es tres televisores y la moda es dos televisores por hogar.

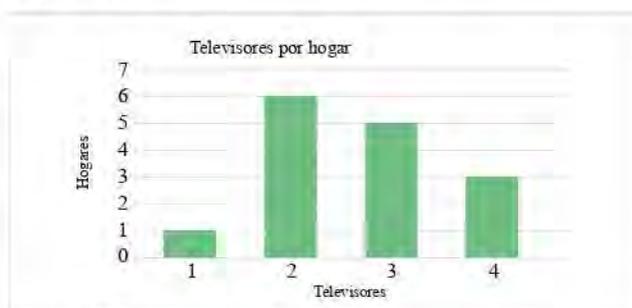


Figura 7.15. Televisores por hogar.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

Tendencia de dispersión. Es el valor de referencia que representa la distribución de los datos alrededor de sus medidas de tendencia central. Una cualidad de esta dispersión es que un valor grande indica que los datos están más alejados o dispersos de la medida de tendencia central, mientras un valor pequeño (cercano al cero) indica que los datos tienden a estar más concentrados alrededor de la medida de tendencia central.

Una medida de tendencia de dispersión muy usada es la desviación estándar, la cual indica el grado de agrupamiento de los datos alrededor de la media aritmética. Imagina que estás analizando el tiempo destinado al día para ver videos de TikTok® por estudiantes del grupo A (Figura 7.16) y del grupo C (Figura 7.17).

Observa que en el histograma del grupo A los datos están más dispersos que en el histograma del grupo C, por lo que el grupo A tiene una mayor desviación estándar que el grupo C.



Figura 7.16. Tiempo destinado al día para ver videos de TikTok por estudiantes del grupo A.

Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

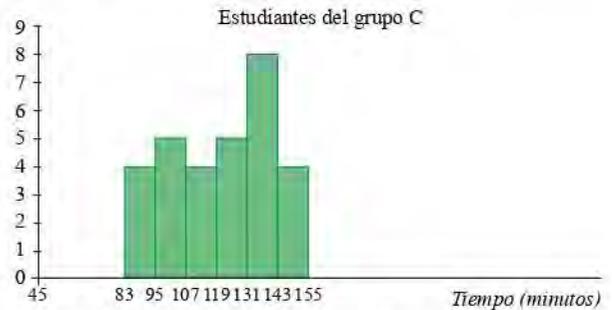


Figura 7.17. Tiempo destinado al día para ver videos de TikTok por estudiantes del grupo C.

Fuente: Elaboración propia. (Excel, 2023).

Actividad de aprendizaje 7.5.

En las siguientes gráficas, determina el tipo de tendencia que muestran los datos y justifica tu respuesta.



Figura 7.18. Peso de 20 estudiantes

Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).



Figura 7.19. Tiempo invertido en plataformas y dispositivos digitales.

Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).



Figura 7.20. Resultados de JG y JP de la LMO 2022-2023.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

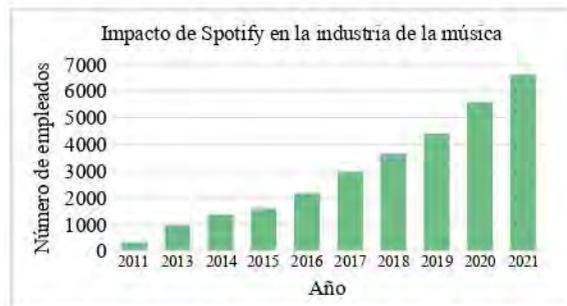


Figura 7.21. Impacto de Spotify en la industria de la música
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

Actividad de aprendizaje 7.6

- De la gráfica que elaboraste con las calificaciones de los estudiantes del grupo en la Actividad de aprendizaje 7.4, analiza si se destaca:
 - Una tendencia creciente, decreciente o estacionaria: _____
 - Un valor que más se repite o moda en la cantidad de datos: _____
 - El punto medio o mediana de los datos: _____
 - Un valor que se aleje sustancialmente de los datos: _____
- Calcula el promedio o media aritmética de los datos obtenidos: _____
 - ¿Se aprecia si los datos se concentran o dispersan respecto a alguno de los valores de tendencia central? _____

Justifica tu respuesta: _____

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: _____ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 7. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Desarrollé en el orden previsto los pasos necesarios para la construcción de diferentes tipos de gráficos (M1-C1).			
Seleccioné, en correspondencia con el tipo de datos obtenidos de un evento, el tipo de gráfico apropiado para representarlos (M2-C1).			
Identifiqué tendencias y comportamientos específicos de los datos correspondientes a determinados eventos a través de las tablas y gráficas estadísticas (M2-C2).			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 7 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Desarrolló en el orden previsto los pasos necesarios para la construcción de diferentes tipos de gráficos (M1-C1).			
Seleccionó, en correspondencia con el tipo de datos obtenidos de un evento, el tipo de gráfico apropiado para representarlos (M2-C1).			
Identificó tendencias y comportamientos específicos de los datos correspondientes a determinados eventos a través de las tablas y gráficas estadísticas (M2-C2).			

Nombre y firma de quien coevalúa

La relación entre variables categóricas

Frecuencia esperada	Preferencia Baja	Preferencia Alta	Total
Hombres	$f_e = \frac{36 \cdot 47}{100} = 16.92$	$f_e = \frac{64 \cdot 47}{100} = 30.08$	47
Mujeres	$f_e = \frac{36 \cdot 53}{100} = 19.08$	$f_e = \frac{64 \cdot 53}{100} = 33.92$	53
Total	36	64	100

Tabla 8.2. Frecuencia esperada del consumo de refrescos por género.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2023).

Progresión de aprendizaje 8

Analiza cómo se relacionan entre sí, dos o más variables categóricas a través del estudio de alguna problemática o fenómeno de interés para el estudiantado, con la finalidad de identificar si dichas variables son independientes.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C2 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	A			
	C			
	H			
M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	A			
	C			
	H			

Ya has aprendido a representar gráficamente, de diferentes formas, la información o datos que se obtienen sobre un conjunto de personas, objetos o sobre la ocurrencia de un evento.

Para el estudio de una o más variables, sobre un determinado suceso, es importante diferenciar la naturaleza de aquellas variables que son **cuantitativas**, es decir, las que se pueden medir en una escala numérica, de las que tienen un carácter cualitativo. Se le llama **variable categórica** a la que se utiliza en el campo de la estadística para designar una característica o propiedad no-numérica o cualitativa a algún individuo, condición o suceso. Se utilizan básicamente, para clasificar o calificar los elementos de un conjunto considerado.

Son variables categóricas las siguientes:

- Color; cuyos valores pueden ser: azul, verde, rojo, blanco, entre otros.
- Sexo; con los valores: hombre o mujer.
- Grupo sanguíneo; con rango de valores: *A*, *B*, *AB*, *O*.
- Nivel de educación: primaria, secundaria, medio superior, superior.

Por ejemplo, si en un hospital hay 170 enfermos hospitalizados, el grupo sanguíneo, que es una variable categórica, se registra dentro de la historia clínica. Si bien, es una variable no numérica, es posible saber cuántos, del total de enfermos, están en cada rango de valores. Supongamos que se obtiene lo siguiente:

Grupo:	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>AB</i>	<i>O</i>
Cantidad:	45	50	35	40

Actividad de aprendizaje 8.1

Con los datos anteriores, utilizando Excel, confecciona un gráfico de barras para representarlos.

1. ¿Se aprecia algún tipo de tendencia en dichos datos; en ese caso cuál? _____

2. ¿Qué medida de tendencia central es más apropiada para caracterizar estos datos? _____

Para conocer la tendencia o valor más probable de una variable categórica se utiliza como medida de tendencia central *la moda*, pues significa el valor que más se repite en un conjunto de datos.

Actividad de aprendizaje 8.2

Identifica en cada una de las siguientes expresiones las variables categóricas y las cuantitativas.

1. En una investigación epidemiológica se analiza la influencia que tiene **la vacunación contra cierta enfermedad en las personas que contraen ese padecimiento**. _____

2. En una investigación sobre la anemia se estudia la relación que hay entre **el consumo de determinados alimentos y la concentración de hemoglobina**. _____

3. En una investigación, realizada por oculistas, se busca determinar la influencia que tiene **el tiempo que se utiliza el celular en la fatiga ocular**. _____

4. En una investigación, realizada por médicos, se analiza la relación que hay entre **el tipo de grasas y la presión arterial**. _____

5. En un estudio, realizado por médicos, se analiza cómo **la actividad física mejora la circulación de la sangre**. _____

6. En una investigación, realizada por gastroenterólogos, se busca determinar cómo **la cantidad de café puede modificar los niveles de reflujo del ácido estomacal**. _____

7. En una investigación realizada por estudiantes de ciencias de la educación, se busca establecer cómo **el método de estudio elegido influye en el rendimiento académico**. _____

Actividad de aprendizaje 8.3

Escribe tres ejemplos similares a los planteados en la actividad de aprendizaje 8.2 y que puedan ser investigados posteriormente por ti.

1. _____
2. _____
3. _____

El análisis del comportamiento de una variable al estudiar un individuo o suceso nos permite valorar que repercusión puede tener sobre el mismo. Sin embargo, también es posible considerar el estudio simultáneo de dos variables y su efecto sobre un mismo suceso o situación y preguntarnos, si estudiamos a la vez esas dos variables, lo siguiente: ¿habrá una relación entre ambas?, ¿influirán los valores de una en los valores de la otra?

Las **variables bidimensionales** son aquellas que, desde el punto de vista estadístico, miden dos o más características diferentes de un mismo individuo, suceso o situación y posibilitan estudiar la relación entre ellas.

Como ejemplo podemos mencionar la problemática relacionada con el Covid-19, en el que las autoridades del sector salud, luego de realizar estudios estadísticos, determinaron que la aplicación de vacunas a la población reduce de manera muy significativa los riesgos de contagio.

Tomando como referencia el ejemplo anterior, ¿cuál es el suceso o situación que se valora?, ¿cuáles serían las variables mencionadas?, ¿consideras que existe relación de dependencia entre ellas?

Pero, no siempre se puede presuponer que una serie de variables sobre un determinado suceso tienen una relación, puesto que pueden aparentar que sí y, sin embargo, no tener ninguna, por lo que es acertado estudiar bajo qué situaciones hay una relación entre dos variables y en cuáles no se manifiesta influencia entre ellas.

La importancia de su estudio radica en que la relación entre dos variables juega un papel muy relevante, tanto en el campo social y económico, como para la salud y el examen de fenómenos naturales, pues su estudio y análisis adecuados favorecen la toma de decisiones asertivas.

En el análisis de variables bidimensionales, se dice que dos variables son dependientes si conocer el valor de una de ellas afecta la distribución de la otra variable, y son independientes si conocer el valor de una de ellas no afecta la distribución de la otra variable.

Una de las formas más apropiadas para el registro de las variables bidimensionales son las tablas de doble entrada o de contingencia, las cuales se construyen a partir de una matriz de filas y columnas en las que se registran los datos; en las columnas se expresan las categorías de información y en las filas se agregan los datos.

Actividad de aprendizaje 8.4

La siguiente es una tabla de doble entrada o de contingencia que muestra el número de jugadores de béisbol de la Liga Mexicana del Pacífico de México que hacen estiramiento antes de cada juego, y cuántos tuvieron lesiones durante la temporada regular.

	Lesión durante el año pasado	No lesión durante el año pasado	Total
Hace estiramientos	45	255	300
No hace estiramientos	189	211	400
Total	234	466	700

1. ¿Qué variables se contrastan? _____

2. ¿A qué tipo de variables se hace referencia, cuantitativas o categóricas? Argumenta tu respuesta.

3. Completa la siguiente tabla con los porcentajes correspondientes.

	Lesión durante el año pasado	%	No lesión durante el año pasado	%	Total
Hace estiramientos	45	$\frac{45}{300} =$	255	$\frac{255}{300} =$	300
No hace estiramientos	189	$\frac{189}{400} =$	211	$\frac{211}{400} =$	400
Total	234		466		700

4. Valora los datos de la tabla anterior, y elabora una conclusión respecto a la posible relación que existe entre hacer o no estiramientos, además de presentar o no lesiones. _____

Si se analizan los datos de la tabla en forma porcentual es posible inferir algunas conclusiones no tan fáciles de determinar si estos estuvieran solo listados. El número de **lesiones** cuando **se hace estiramiento** es equivalente al 15%, mientras que la proporción de **no lesiones** cuando **se hace estiramiento** es igual al 85%. A su vez, la proporción de **lesiones** cuando **se hace estiramiento** con respecto a cuando **no se hace estiramiento** también es diferente. Todo parece indicar que hay menos lesiones si se hace estiramiento y más lesiones si no se hace. Como resultado, se puede inferir que si un deportista hace estiramientos tiene menos probabilidad de sufrir lesiones.

Cuando se comparan dos variables categóricas con valores binarios, es decir, solo dos valores posibles para la variable, el análisis de las proporciones puede ser útil para determinar si existe una relación entre ambas variables. En otras palabras, si las proporciones de dos variables son similares, entonces no hay una relación significativa entre ellas y pueden ser estadísticamente independientes. Por otro lado, si las proporciones son distintas, entonces hay una relación significativa entre las dos variables y pueden ser estadísticamente dependientes.

Sin embargo, en general, el análisis de las proporciones no es suficiente para determinar si existe una relación entre las variables categóricas. Para determinar con más precisión si hay relación entre las variables se utiliza una prueba estadística denominada Chi-cuadrado.

La **prueba Chi-cuadrado** es un procedimiento estadístico utilizado para analizar la relación entre dos variables categóricas. Para calcular la prueba Chi-cuadrado, se utilizan los datos de una tabla de contingencia, que muestra la frecuencia de los valores de cada variable. A través de esta prueba se busca determinar si una diferencia, entre los datos obtenidos y los datos esperados, se debe al azar o si existe una relación entre las variables consideradas.

Veamos un ejemplo: supón que necesitas conocer si la preferencia por el consumo de sodas o refrescos está relacionada con el género de los jóvenes y, para ello en la Preparatoria Guasave Diurna realizas una encuesta a 100 estudiantes, con el resultado que muestra la Tabla 8.1.

Frecuencia observada (f_o)	Preferencia Baja	Preferencia Alta	Total
Mujeres	21	26	47
Hombres	15	38	53
Total	36	64	100

Tabla 8.1. Preferencia del consumo de refrescos por género.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2023).

Como investigador quieres especificar la respuesta con un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$. El **nivel de significancia** es un valor que se utiliza en estadística para determinar si un resultado es estadísticamente significativo. Un nivel de significancia del 0.05% indica que hay un 5% de probabilidad de que los resultados observados sean debidos al azar y no a una causa real.

Se parte del criterio de que la preferencia, por las sodas y el género de las personas son independientes o que no existe relación entre ellas y se le llama hipótesis 0 o hipótesis nula:

H_0 : “El género y la preferencia por las sodas son independientes”.

H_1 : “El gusto por las sodas está relacionado con el género de la persona”.

La prueba Chi-cuadrado, que se denota por χ^2 , sirve para determinar si se acepta la hipótesis nula o si se rechaza y, en consecuencia, se acepta la hipótesis alternativa H_1 .

Una vez confeccionada la tabla de contingencia, para aplicar la prueba Chi-cuadrado se procede de la siguiente manera:

- Calcula la frecuencia esperada (f_e) de cada celda, que es el número de observaciones que se esperaría en cada celda si no hubiera relación entre las variables, como se expresa en H_0 . Para ello, se multiplica la frecuencia total de la fila correspondiente a esa celda por la frecuencia total de la columna correspondiente a la misma celda y se divide por el tamaño total de la muestra que aparece en la Tabla 8.2, y se obtiene:

Frecuencia esperada	Preferencia Baja	Preferencia Alta	Total
Hombres	$f_e = \frac{36 \cdot 47}{100} = 16.92$	$f_e = \frac{64 \cdot 47}{100} = 30.08$	47
Mujeres	$f_e = \frac{36 \cdot 53}{100} = 19.08$	$f_e = \frac{64 \cdot 53}{100} = 33.92$	53
Total	36	64	100

Tabla 8.2. Frecuencia esperada del consumo de refrescos por género.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2023).

- Calcula la desviación entre la frecuencia observada y la frecuencia esperada de cada celda. Para calcular la desviación, se resta la frecuencia esperada de la frecuencia observada y se eleva al cuadrado; luego, se divide por la frecuencia esperada. A continuación, suma todas las desviaciones obtenidas. El resultado obtenido es la estadística de prueba Chi-cuadrado.

$$\chi^2 = \frac{(21 - 16.92)^2}{16.92} + \frac{(26 - 30.08)^2}{30.08} + \frac{(15 - 19.08)^2}{19.08} + \frac{(38 - 33.92)^2}{33.92}$$

$$= 0.9838 + 0.5534 + 0.8725 + 0.4908 = 2.9005$$

- Se determina el número de grados de libertad de la prueba. El número de grados de libertad se calcula restando uno del número de filas y uno del número de columnas de la tabla de contingencia; por tanto, en este ejemplo, los datos registrados están en $f = 2$ filas y $c = 2$ columnas, por lo tanto, el número de grados de libertad es: $k = (2 - 1)(2 - 1) = 1$.
- Consulta la tabla de distribución Chi-cuadrado para determinar el valor crítico de la prueba (una sección de esta aparece en la Tabla 8.3). El valor crítico depende del nivel de significancia y el número de grados de libertad. En este caso para un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$ y un grado de libertad se obtiene como valor crítico 3.841, como se muestra en la Tabla 8.3.

	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.5	0.2	0.1	0.05	0.025	0.02	0.01
1	0.0000397	0.000157	0.000982	0.00393	0.0158	0.455	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635
2	0.0100	0.020	0.051	0.103	0.211	1.386	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.210
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	2.366	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	3.357	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	4.351	7.289	9.236	11.070	12.833	13.388	15.086
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	5.348	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	6.346	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	7.344	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168	20.090
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	8.343	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	9.342	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209

Tabla 8.3. Tabla de distribución de la Chi-cuadrado.

Fuente: Disfruta las Matemáticas, Disponible en: <https://www.disfrutalasmatematicas.com/datos/tabla-chi-cuadrado.html>

- Compara el valor de la estadística de prueba Chi-cuadrado obtenida con el valor crítico obtenido. Si el valor de la estadística de prueba es mayor que el valor crítico, se rechaza la hipótesis nula de que no hay relación entre las variables. Si el valor de la estadística de prueba es menor o igual que el valor crítico, se acepta la hipótesis nula.

En el ejemplo, $\chi^2 = 2.9005 < 3.841$, por lo que se acepta la hipótesis nula que expresa que el género y la preferencia por las sodas son independientes, es decir que la preferencia por las sodas o refrescos no está vinculada con el género de la persona, con un nivel de significación de 5%.

Siguiendo estos pasos es posible, para otras situaciones, calcular la prueba Chi-cuadrado y determinar si existe o no una relación entre dos o más variables que sean categóricas; pero los cálculos pueden simplificarse mucho haciendo uso de herramientas digitales. Para ello escanea el código QR.



QR 8.1. Calculadora de prueba de independencia de Chi-cuadrado.
Fuente: Parzibyte, 2023.

Al abrir la calculadora digital para la prueba Chi-cuadrado, aparece una tabla en la que puedes rellenar los valores obtenidos de las variables y obtienes de inmediato el valor de χ^2 , como se muestra en la Figura 8.1 para el ejemplo anterior.

Observa que el valor dado por la calculadora digital es, $\chi^2 = 2.9005$, el cual coincide con el calculado anteriormente. También puedes usar aplicaciones de celular como Mathematics, GeoGebra, entre otras.

Para realizar una prueba de independencia de Chi-cuadrado, simplemente completa las celdas a continuación para obtener una tabla de contingencia de hasta 5 filas y 5 columnas. Si su tabla es más pequeña que 5×5 , simplemente deje las otras celdas en blanco.

	Grupo 1	Grupo 2
Categoría 1	21	26
Categoría 2	15	38
Categoría 3		
Categoría 4		
Categoría 5		

Calcular

Estadística de prueba χ^2 : 2.900317

Figura 8.1. Tabla de contingencia en la calculadora digital de *statologos*, para realizar la prueba Chi-cuadrado.

Fuente: <https://statologos.com/calculadora-prueba-de-independencia-chi-cuadrado/>

Actividad de aprendizaje 8.5

Aplica la prueba de independencia Chi-cuadrado, con un nivel de significancia 0.01, al ejemplo de la Actividad de aprendizaje 8.4, para determinar si existe relación entre las variables: jugadores de beisbol que hacen estiramiento o no antes de cada juego y la posibilidad de tener o no lesiones.

1. Forma la tabla de contingencia 2×2 .
2. Formula H_0 : _____
 H_1 : _____
3. Aplica la calculadora prueba de independencia Chi-cuadrado y obtienes $\chi^2 =$ _____
4. Determina el grado de libertad: _____
5. Obtén en la tabla de distribución Chi-cuadrado el valor crítico de la prueba para ese grado de libertad y nivel de significancia: _____
6. Compara los valores obtenidos por la calculadora y por la tabla: _____
7. ¿A qué conclusión llegas? _____

Actividad de aprendizaje 8.6

La siguiente tabla muestra la relación que existe entre el consumo de comida chatarra y la obesidad en alumnos del primer grado de la preparatoria Guasave Diurna.

	Presenta obesidad	No presenta obesidad	Total
Consumo comida chatarra	300	290	590
No consume comida chatarra	290	320	610
Total	590	610	1200

1. ¿Qué variables se contrastan? _____
2. ¿A qué tipo de variables hace referencia? ¿Cuantitativas o categóricas? Argumenta tu respuesta. _____
3. Elabora una hipótesis nula H_0 y la alternativa H_1 y aplica la prueba de independencia Chi-cuadrado con un nivel de significancia de 0.01, utilizando alguna herramienta digital.
 H_0 : _____
 H_1 : _____
4. ¿A qué conclusión llegas? _____

Si quieres saber más sobre la prueba Chi-cuadrado escanea el código QR.

QR 8.2. Prueba Chi-cuadrado.
Fuente: Parzibyte, 2023.



AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 8. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el estudio de la relación entre dos variables categóricas.			
Participé activamente con ideas para identificar si dos variables categóricas son independientes.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas sobre variables categóricas.			
Analicé dos variables categóricas para verificar su independencia (M3-C2).			
Usé las proporciones para verificar si existe relación entre dos variables categóricas (M4-C2).			
Justifiqué mediante la prueba Chi-cuadrado si existe relación entre dos variables categóricas (M4-C2).			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 8 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el estudio de la relación entre dos variables categóricas.			
Participó activamente con ideas para identificar si dos variables categóricas son independientes.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas sobre la relación entre dos variables categóricas.			
Analizó dos variables categóricas para verificar su independencia (M3-C2).			
Usó las proporciones para verificar si existe relación entre dos variables categóricas (M4-C2).			
Justificó mediante la prueba Chi-cuadrado si existe relación entre dos variables categóricas (M4-C2).			

Nombre y firma de quien coevalúa

La relación entre variables cuantitativas

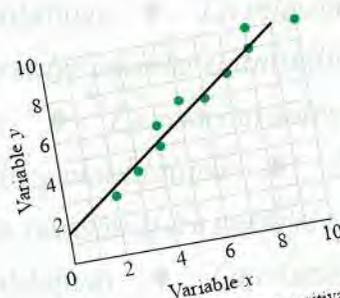


Figura 9.3. Correlación directa o positiva
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

Progresión de aprendizaje 9

Analiza dos o más variables cuantitativas a través del estudio de alguna problemática o fenómenos de interés para el estudiantado, con la finalidad de identificar si existe correlación entre dichas variables.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C2 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	A			
	C			
	H			
M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	A			
	C			
	H			

En la progresión anterior, analizaste la relación entre dos variables categóricas, así como, la dependencia e independencia de las variables. En esta progresión vas a relacionar dos o más variables cuantitativas a través de problemáticas de interés mediante el coeficiente de correlación de Pearson para lo cual aprenderás a construir el gráfico de dispersión, que será de apoyo para interpretar dicho coeficiente. Los organizadores de la Liga Mexicana del Pacífico quieren realizar un estudio sobre el impacto que ha tenido el llamado rey de los deportes (beisbol). De las siguientes opciones, ¿cuáles son variables cuantitativas?

- Las marcas de los patrocinadores.
- El número de espectadores por juego.
- Ganancias de la venta de suvenires.
- Los colores de las camisetas más populares.

¿Las variables que elegiste apoyan a los organizadores en el estudio sobre el impacto del beisbol en nuestra región? Argumenta tu respuesta.

Para estudiar la relación entre dos variables cuantitativas debes saber que, dicha relación **es la medida de asociación entre dos variables que se miden en una escala cuantitativa o numérica**. Para ello, recuerda que las variables cuantitativas son aquellas que se pueden medir en una escala numérica como el peso, la altura, el precio o el tiempo. A continuación, se describen algunos tipos de relaciones entre variables cuantitativas.

La **relación funcional** es una relación en la que los puntos de un gráfico se distribuyen de forma lineal. En este caso la relación entre las dos variables se puede modelar con una línea recta, lo cual hace referencia a una relación funcional cuya **correlación es perfecta**, resultado de modelos determinísticos.

El comportamiento de un modelo determinístico se expresa en la Figura 9.1, en la que el conjunto de puntos graficados se ajusta perfectamente a la recta trazada.

La gráfica de una función lineal es una recta que tiene por ecuación $y = mx + b$, donde $m \neq 0$ y (x, y) son las coordenadas de cualquier punto de la recta; m es la pendiente de la recta y b es la ordenada en el origen.

La pendiente de una recta se determina mediante la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ donde } x_1 \neq x_2.$$

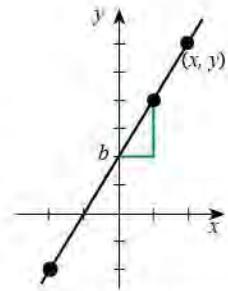


Figura 9.1a. Gráfica de la ecuación $y = mx + b$.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2023).

Actividad de aprendizaje 9.1

Determina la ecuación de la recta trazada en la siguiente gráfica y completa la tabla.

Procedimiento:

1. Identifica las coordenadas de los puntos A , B , C y D en la gráfica y completa la tabla.
2. Utiliza la fórmula de la pendiente de una recta.
3. Datos necesarios: $b =$ _____
4. Para determinar el valor de m , se necesitan las coordenadas de dos puntos de la recta:

$$A(\quad , \quad) \rightarrow x_1 = \quad , y_1 = \quad$$

$$B(\quad , \quad) \rightarrow x_2 = \quad , y_2 = \quad$$

5. Sustituye en la fórmula.
6. El valor de la pendiente $m =$ _____
7. Sustituye en $y = mx + b$
8. La ecuación de la recta es: _____

x	y	Puntos

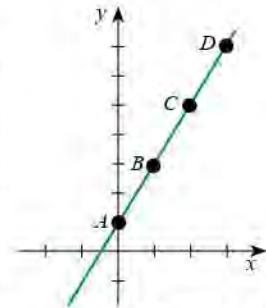


Figura 9.1b. Gráfica de la ecuación $y = mx + b$.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2023).

QR 9.1. Comprueba el resultado en Demos.

Fuente: Parzibyte, 2023.



En el ejemplo anterior se evidencia que, tratar con relaciones funcionales es lo ideal, es decir, utilizar ecuaciones matemáticas para pronosticar una cantidad exacta en términos de otra, algo posible para las ciencias exactas; sin embargo, para otras áreas como las ciencias sociales y humanas se recurre a la llamada **relación estadística**, que viene siendo una medida de asociación entre dos o más variables. La relación estadística se puede determinar de forma visual mediante el **gráfico de dispersión** y de forma numérica, mediante el **coeficiente de correlación de Pearson**.

El **gráfico de dispersión** es una herramienta gráfica que permite visualizar la relación entre dos variables. En él cada punto representa un par de valores de las dos variables. Por ejemplo, si estamos analizando la relación entre el peso y la altura de un grupo de personas, cada punto del gráfico representaría el peso y la altura de una persona específica.

Un gráfico de dispersión se caracteriza por tener **dos ejes**, horizontal y vertical; **puntos**, donde cada punto representa un par de valores de las dos variables; y **forma**, la cual puede indicar la naturaleza de la relación entre las dos variables. Al graficar los datos de la Tabla 9.1, obtienes un gráfico de dispersión (Figura 9.2) de la relación de la calificación obtenida por doce estudiantes en la asignatura de Matemáticas y Mecánica.

Alumno	Calificación en Matemáticas	Calificación en Mecánica
1	3	4
2	4	5
3	5	4
4	6	5
5	6	7
6	9	8
7	7	6
8	8	5
9	10	9
10	10	10
11	8	8
12	10	8

Tabla 9.1. Datos de la calificación obtenida en Matemáticas y Mecánica.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2023).

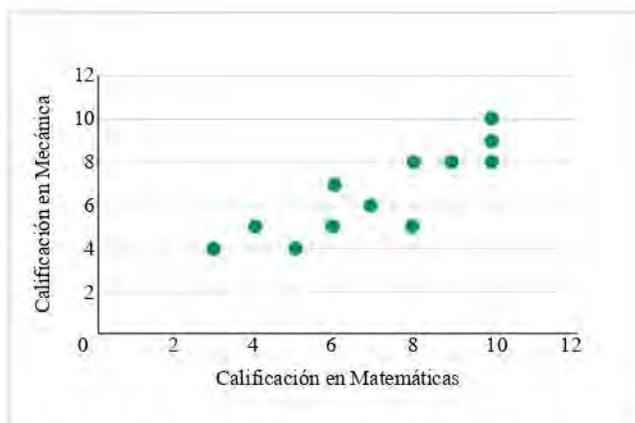


Figura 9.2. Gráfico de dispersión entre la calificación obtenida en Matemáticas y Mecánica.

Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

La relación entre variables cuantitativas es una herramienta importante para la investigación, el control de calidad y el *marketing*. En la investigación la relación entre variables cuantitativas se utiliza para explorar las asociaciones entre diferentes variables. En el control de calidad la relación entre variables cuantitativas se utiliza para monitorear la variación de dos variables en un proceso de producción. En el *marketing* se utiliza para analizar las asociaciones entre diferentes variables en un estudio de mercado. En este sentido podemos decir que la correlación examina la relación entre dos variables, sin embargo, no significa necesariamente que una variable sea la causa de la otra. Por eso, solemos decir que la **correlación no implica causalidad**; posiblemente, tener buenas calificaciones en Matemáticas no significa que también las tendrás en Mecánica, ya que, aunque hay cierta similitud entre ellas, no necesariamente una materia es causa de la otra.

Como observaste, el gráfico de dispersión es especialmente útil cuando se desea examinar si existe una correlación o patrón entre dos conjuntos de datos numéricos. Puede ayudarte a identificar patrones, tendencias y correlaciones que son fundamentales en el análisis de datos y la toma de decisiones.

Para saber si existe correlación debes observar la dirección de la relación entre las dos variables. Si los puntos en el gráfico tienden a agruparse en una dirección específica, esto indica una correlación. Si los puntos se alejan de manera uniforme, esto indica una falta de correlación. Se sugiere trazar una línea recta siguiendo el patrón de los puntos partiendo del punto coordinado de las medias de las variables (\bar{x}, \bar{y}) conocida como **recta de regresión**. Observa que en la Figura 9.3, la línea de tendencia es ascendente, por lo que las variables están correlacionadas de forma directa. Si es descendente como en la Figura 9.4, están correlacionadas de forma inversa. Y si no existe patrón alguno que marque una tendencia como en la Figura 9.5, entonces su correlación es nula o inexistente.

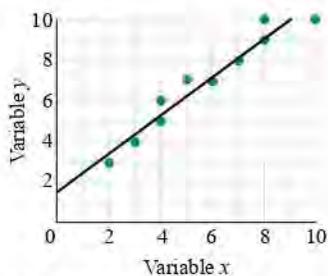


Figura 9.3. Correlación directa o positiva.

Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

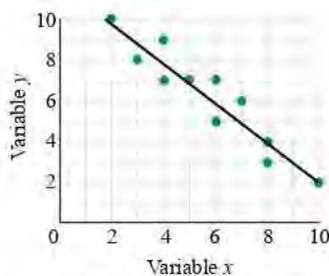


Figura 9.4. Correlación inversa o negativa.

Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

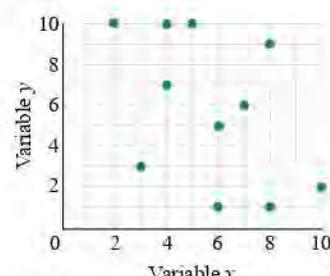


Figura 9.5. Correlación nula.

Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

De la misma forma, la fuerza de la correlación se puede evaluar observando cuán cerca están los puntos del gráfico a una línea de tendencia. Si los puntos están cerca de la línea, la correlación es **fuerte**; si están parcialmente dispersos, la correlación es **débil**; si los puntos están totalmente dispersos, no hay fuerza de correlación alguna.

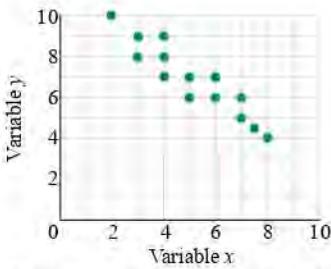


Figura 9.6. Fuerza de correlación fuerte.

Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

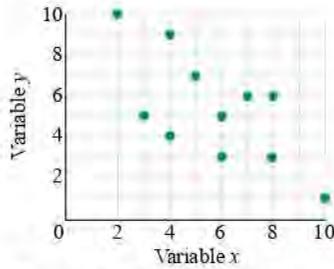


Figura 9.7. Fuerza de correlación débil.

Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

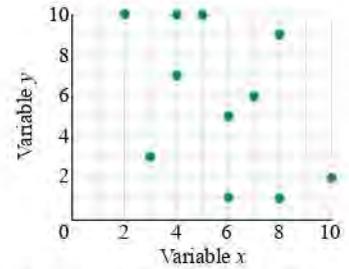


Figura 9.8. Fuerza de correlación nula.

Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).



QR 9.2. Correlación entre dos variables.

Fuente: Parzibyte, 2023).

Otro factor que puede influir en la interpretación de la correlación entre variables incluye a la detección de valores atípicos o puntos que se desvíen significativamente del patrón general en el gráfico. Teniendo en cuenta dicha información se pueden establecer conclusiones basadas en la existencia de correlación, su naturaleza y fuerza de tal forma que sea útil para tomar decisiones o realizar predicciones.

Actividad de aprendizaje 9.2

Analiza y determina si existe correlación entre las variables de los siguientes ejercicios. Argumenta basándote en la lectura anterior.

- Consumo de café x frente al Coeficiente Intelectual (IQ) de las personas y .

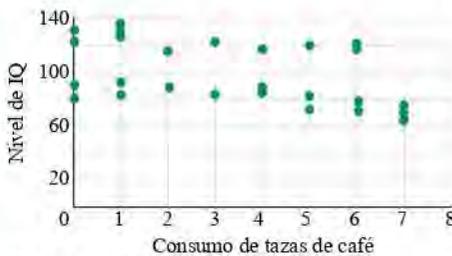


Figura 9.9. Gráfico de dispersión.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

¿Existe correlación? _____

Argumenta: _____

- Altura de alumnos x y sus puntajes de exámenes y .

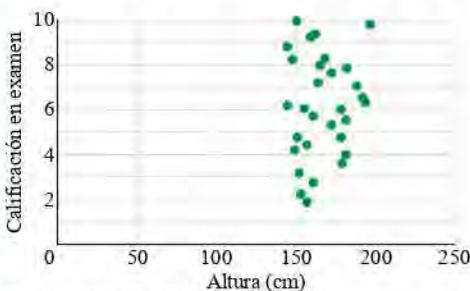


Figura 9.10. Gráfico de dispersión.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

¿Existe correlación? _____

Argumenta: _____

3. Semanas trabajadas x y la paga a un ingeniero y .

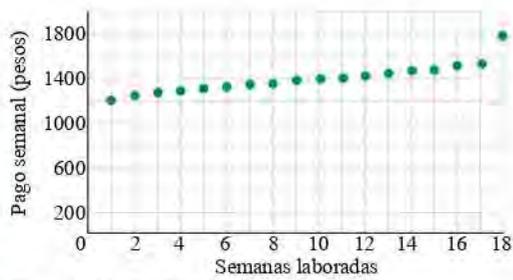


Figura 9.11. Gráfico de dispersión.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

¿Existe correlación? _____

Argumenta: _____

4. Talla del calzado x y películas vistas en un año por los estudiantes y .

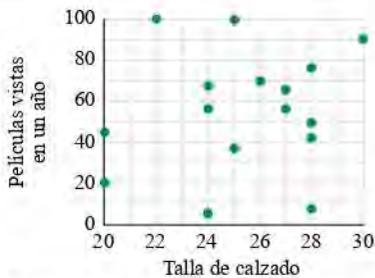


Figura 9.12. Gráfico de dispersión.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

¿Existe correlación? _____

Argumenta: _____

5. Peso de una persona x y sus ingresos mensuales y .

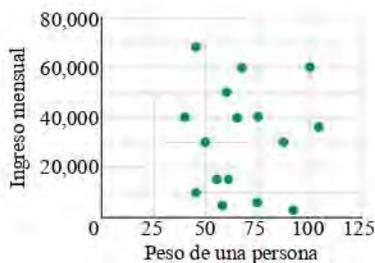


Figura 9.13. Gráfico de dispersión.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

¿Existe correlación? _____

Argumenta: _____

6. La temperatura x y venta de jerséis y .

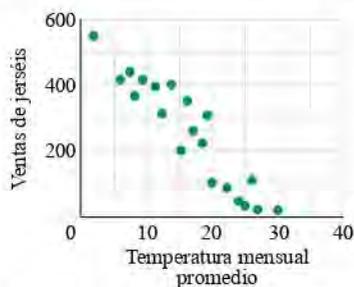


Figura 9.14. Gráfico de dispersión.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

¿Existe correlación? _____

Argumenta: _____

7. ¿Consideras que es útil el uso del gráfico de dispersión para determinar la correlación entre dos variables? ¿Por qué? _____

Actividad de apoyo 9.1

QR 9.3. Para profundizar sobre la Actividad de aprendizaje 9.2. Fuente: Parzibyte, 2023).

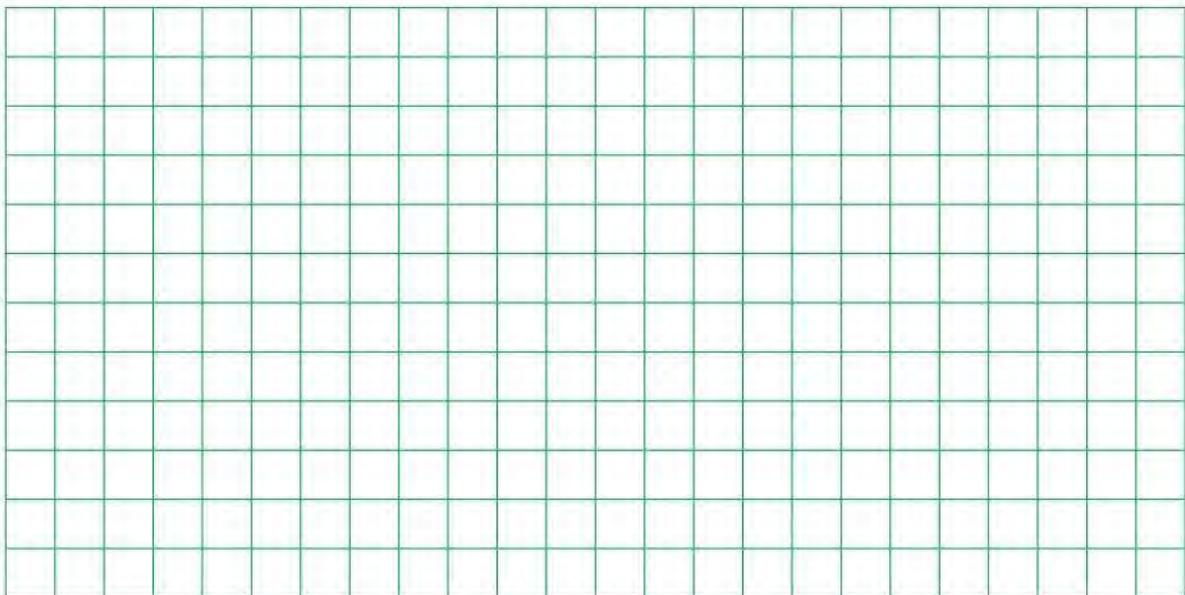


Actividad de aprendizaje 9.3

1. Organízate y solicita la estatura en metros y el peso en kilogramos a otros a 10 estudiantes. Usa la variable x para representar la estatura en metros y la variable y para el peso en kg.
2. Registra los datos de cada alumno en la siguiente tabla:

Alumno	Estatura x	Peso y
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

3. Usa los datos de la tabla para construir el gráfico de dispersión. Observa que cada punto (x_1, y_1) en el gráfico corresponde a los datos de un alumno.



4. Argumenta con base a la naturaleza y fuerza de la correlación, ¿qué tipo de relación hay entre las variables estatura y peso? _____

Actividad de apoyo 9.2

QR 9.4. Para profundizar sobre la Actividad de aprendizaje 9.3.

Fuente: Parzibyte, 2023.



Como observaste, el gráfico de dispersión facilita de forma intuitiva analizar la correlación entre dos variables. Otra forma es mediante el coeficiente de correlación, el cual es una medida numérica que indica la fuerza y la dirección de la relación entre dos variables que varía de -1 a 1 .

Un coeficiente de correlación de 1 indica una **relación lineal positiva perfecta**, lo que haría referencia a una función lineal creciente; un coeficiente de correlación de -1 indica una **relación lineal negativa perfecta** o función lineal decreciente; y un coeficiente de correlación de 0 indica que **no hay relación** entre las dos variables.

Actividad de apoyo 9.3

QR 9.5. Para profundizar sobre la variación del coeficiente de correlación.

Fuente: Parzibyte, 2023.



Para medir la correlación de variables cuantitativas puedes utilizar el **coeficiente de correlación de Pearson**, que es una medida de la fuerza y la dirección de la relación lineal entre dos variables cuantitativas; y se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

Donde:

- r es el coeficiente de correlación de Pearson.
- x_i es i -ésimo valor de la variable x .
- y_i es i -ésimo valor de la variable y .
- \bar{x} es la media de la variable x .
- \bar{y} es la media de la variable y .
- \sum es la suma de los valores.



QR 9.6. Hoja de cálculo de Google Docs.

Fuente: Parzibyte, 2023.

El **cálculo** del coeficiente de correlación de Pearson lo puedes hacer desde diferentes aplicaciones de celular como Desmos y GeoGebra; también, mediante la aplicación hojas de **cálculo de Google** para analizar el nivel de correlación entre dos variables cuantitativas x y y sobre una población.

Para calcular el coeficiente de correlación de Pearson en la aplicación hojas de cálculo de Google, utiliza la función **COEF.DE.CORREL**, la cual emplea dentro de su algoritmo programado, una expresión propia de dicho coeficiente.

Procedimiento:

1. Captura la tabla de datos como se muestra en la imagen.
2. Da clic en insertar función.
3. Elige Estadísticas y busca COEF.DE.CORREL.
4. Selecciona el rango de datos de la variable y , escribe coma y selecciona el rango de datos de x .
5. Da clic en Enter.

	A	B	C
1	No. Examen	Horas de estudio	Calificación
2		1	20
3		2	16
4		3	34
5		4	23
6		5	27
7		6	32
8		7	18
9		8	22
10			
11	Coeficiente de correlación: <input type="text"/>		
12			

fx Ingresar texto o una fórmula

Figura 9.15. Datos de horas de estudio y de calificación.

Fuente: Google Docs, 2023. Disponible en: <https://docs.google.com/spreadsheets/>.

	A	B	C
1	No. Examen	Horas de estudio	Calificación
2		1	20
3		2	16
4		3	34
5		4	23
6		5	27
7		6	32
8		7	18
9		8	22
10			
11	Coeficiente de correlación: 0.827922179		
12			

Figura 9.16. Cálculo del coeficiente de correlación.

Fuente: Google Docs, 2023. Disponible en: <https://docs.google.com/spreadsheets/>.

	A	B	C
1	No. Examen	Horas de estudio	Calificación
2		1	20
3		2	16
4		3	34
5		4	23
6		5	27
7		6	32
8		7	18
9		8	22
10			
11	Coeficiente de correlación: =COEF.DE.COR		
12			

fx = COEF.DE. CORREL (B2:B9, C2:C9)

Figura 9.17. Función para calcular el coeficiente de correlación.

Fuente: Google Docs, 2023. Disponible en: <https://docs.google.com/spreadsheets/>.

Actividad de aprendizaje 9.4

Usa los datos de la Actividad de aprendizaje 9.3 y realiza lo siguiente:

1. Abre la aplicación **Hojas de Cálculo** en el dispositivo móvil.
2. Captura en la tabla los datos que registraste en la Actividad de aprendizaje 9.3.
3. Utiliza la función **COEF.DE.CORREL**, luego, selecciona los datos de las variables estatura (x) y peso (y) y calcula el coeficiente de correlación.
4. Comenta acerca los resultados obtenidos.

El coeficiente de correlación de Pearson es igual a: _____

5. Toma captura de pantalla y comparte los resultados con el grupo.
6. Interpreta el coeficiente de correlación de las variables analizadas _____

Actividad de apoyo 9.4

QR 9.7. Para profundizar sobre la Actividad de aprendizaje 9.4.
Fuente: Parzibyte, 2023.



Actividad de apoyo 9.5

QR 9.8. Para profundizaar sobre la Actividad de aprendizaje 9.4.
Fuente: Parzibyte, 2023.



AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: ____ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 9. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el estudio de la relación entre dos variables cuantitativas.			
Participé activamente con ideas para identificar si dos variables cuantitativas están correlacionadas.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas sobre la relación entre dos variables cuantitativas.			
Analicé dos variables cuantitativas para verificar si están correlacionadas (M3-C2).			
Usé el gráfico de dispersión para estudiar la correlación entre dos variables cuantitativas (M1-C2).			
Justifiqué mediante el coeficiente de correlación de Pearson si dos variables cuantitativas están correlacionadas (M4-C2).			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 9 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el estudio de la relación entre dos variables cuantitativas.			
Participó activamente con ideas para identificar si dos variables cuantitativas están correlacionadas.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas sobre la relación entre dos variables cuantitativas.			
Analizó dos variables cuantitativas para verificar si están correlacionadas (M3-C2).			
Usó el gráfico de dispersión para estudiar la correlación entre dos variables cuantitativas (M1-C2).			
Justificó mediante el coeficiente de correlación de Pearson si dos variables cuantitativas están correlacionadas (M4-C2).			

Nombre y firma de quien coevalúa

Los valores atípicos y las variables de confusión en afirmaciones estadísticas y gráficas

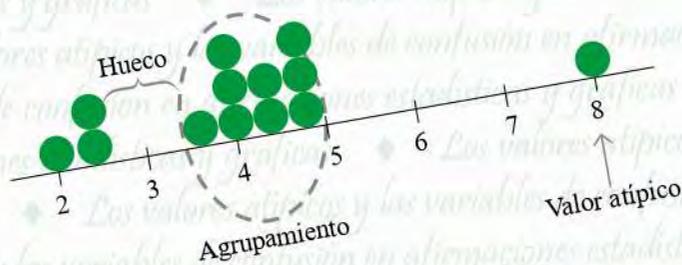


Figura 10.1. Comportamiento de un conjunto de datos.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

Progresión de aprendizaje 10

Cuestiona afirmaciones estadísticas y gráficas, considerando valores atípicos (en el caso de variables cuantitativas) y la posibilidad de que existan factores o variables de confusión.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			
M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

En el marco del pensamiento estadístico, los errores son críticos, ya que, al ser la Estadística una disciplina que maneja información, los resultados producto de su análisis, se usan para tomar decisiones según el contexto de los datos, por ejemplo: en inversiones, medicina, industria, etc. A continuación, vas a estudiar errores o confusiones que pueden originar los datos estadísticos al momento de interpretar gráficas, cuando no se presta atención a las variables de confusión, los datos atípicos o a la paradoja de Simpson.

Las variables de confusión son factores que pueden afectar los resultados de un estudio o experimento al influir en la relación entre la variable independiente (la que se manipula o estudia) y la variable dependiente (la que se mide como resultado). Estas variables pueden generar errores en la interpretación de los datos, haciendo que parezca que hay una relación entre dos variables, cuando en realidad están influenciadas por un tercer factor.

Para controlar una variable de confusión, esta también se tiene que medir e incorporar al estudio; y luego, verificar si la relación entre la variable independiente y dependiente desaparece o se reduce al considerar la variable de confusión, entonces se afirmaría que hay una relación falsa entre dichas variables. Es por ello la importancia de identificar y controlar las variables de confusión en un estudio estadístico para obtener resultados confiables y válidos.

Vale la pena decir que, si se está estudiando cómo la cantidad de ejercicio afecta el peso corporal y no consideran variables como la dieta o el metabolismo, estos factores podrían ser variables de confusión, si no se controlan adecuadamente podrían llevar a conclusiones erróneas sobre la relación entre el ejercicio y el peso.

Actividad de aprendizaje 10.1

Identifica las variables de confusión en las siguientes afirmaciones. Sugerencia, consulta las inteligencias artificiales.

- **Afirmación 1.** Un productor de cacao, afirma que “debemos consumir más chocolate para incrementar nuestra esperanza de vida”.
 - a) ¿Crees que existe una relación entre el consumo de chocolate y la esperanza de vida? _____ Justifica tu respuesta _____

 - b) Identifica la o las posibles variables de confusión. _____

- **Afirmación 2.** El consumo de café propicia cáncer pulmonar.
 - a) ¿Crees que existe una relación entre el consumo de café y el cáncer de pulmón? _____ Justifica tu respuesta: _____

 - b) Identifica la o las posibles variables de confusión. _____

Otra situación que puede presentar resultados no confiables en el análisis de datos estadísticos, son los **valores atípicos**, a menudo llamados *outliers* en inglés, son datos que se alejan significativamente del resto.

Estos valores, pueden ser problemáticos en el análisis de datos, ya que distorsionan la interpretación de las estadísticas descriptivas y los gráficos.



Sabías que...

En la Figura 10.1 se puede observar la distribución donde se visualiza el patrón de variabilidad que presentan los datos de una variable, apreciando que dicha distribución exhibe la frecuencia de cada valor de la variable. A simple vista se observa agrupamiento, hueco, agrupamiento, hueco y valor atípico.

El gráfico de puntos, es decir, la Figura 10.1 nos permite explorar el comportamiento de un conjunto de datos como lo son: huecos, agrupamientos y valores atípicos.

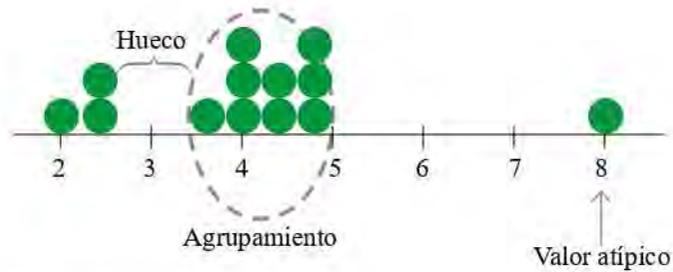
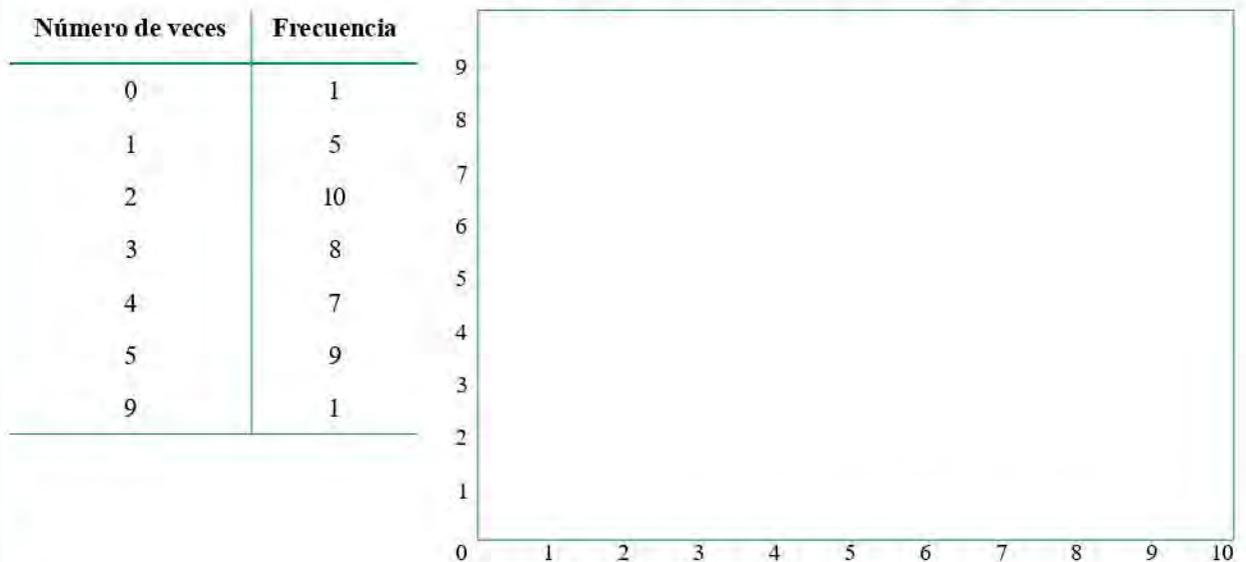


Figura 10.1. Comportamiento de un conjunto de datos.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

En una encuesta se preguntó a 41 madres/padres de familia, ¿cuántas veces a la semana hay que recordarle a un adolescente que haga sus tareas? Los resultados se muestran en la tabla de la Actividad de aprendizaje 10.2.

Actividad de aprendizaje 10.2

1. Realiza un gráfico de puntos con los datos de la siguiente tabla. En el eje horizontal coloca el número de veces y la frecuencia en la parte vertical.



2. ¿Cuál consideras que sea el hueco? ¿Por qué? _____

3. ¿Cuál consideras que es el agrupamiento? ¿Por qué? _____

4. ¿Cuál es el valor atípico? ¿Por qué? _____

5. Calcula la media y la mediana de los datos; luego, indaga en la inteligencia artificial, ¿cómo afecta un valor atípico a la media y a la mediana de los datos? _____

El gráfico de líneas resulta útil para valores de datos específicos. En el gráfico de la Figura 10.2, el eje x (eje horizontal) está formado por los valores de los datos y el eje y (eje vertical) por puntos de frecuencia, estos se conectan mediante segmentos en la línea.

Continuando con los valores atípicos y las formas de cómo representarlos, en esta ocasión realizarás un gráfico de puntos y un gráfico de línea para contrastar cuál gráfico es en el que mejor se identifica un dato atípico.

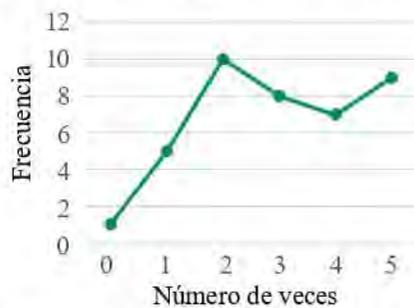


Figura 10.2. Número de veces que una madre/padre de familia recuerda a un adolescente que haga su tarea.

Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

Actividad de aprendizaje 10.3

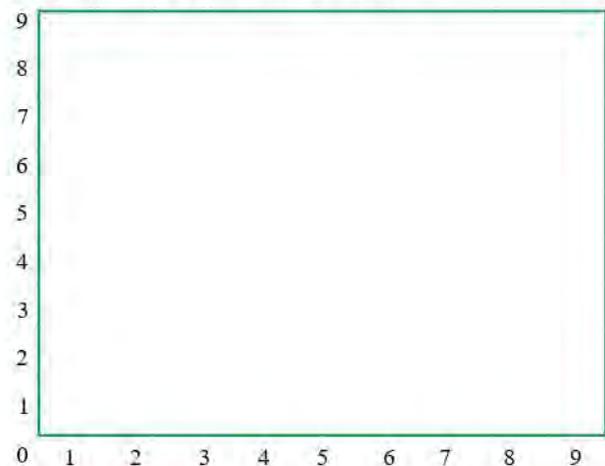
1. Los datos de la siguiente tabla corresponden al número de integrantes de familia de un grupo de estudiantes de bachillerato.

Número de integrantes de familia	Frecuencia
3	6
4	9
5	3
9	1

a) Realiza un gráfico de puntos.



b) Realiza un gráfico de línea.



2. ¿Cuál consideras que sea el hueco? ¿Por qué? _____

3. ¿Cuál consideras que es el agrupamiento? ¿Por qué? _____

4. ¿Cuál es el valor atípico? ¿Por qué? _____

5. ¿Cuál gráfico te ayudó a responder las preguntas anteriores? ¿Por qué? _____

La decisión de cómo tratarlos debe basarse en el contexto y el propósito de tu análisis. Si bien, pueden despreciarse, en otros casos pueden contener información valiosa o ser parte de la población de interés, por lo que eliminarlos sin una justificación sólida podría no ser la mejor opción.

Actividad de aprendizaje 10.4

Se recolectaron las calificaciones en matemáticas de un grupo de estudiantes de bachillerato y se clasificaron por género.

1. Observa las siguientes gráficas y sus medidas de tendencia central.

Mujeres



Media = 4
 Mediana = 4
 Bimodal = 4, 5

Hombres



Media = 4
 Mediana = 3.5
 Moda = 3

Figura 10.3. Calificación en matemáticas por género.
 Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

2. ¿Consideras que las mujeres y los hombres tienen el mismo promedio de calificación? _____
- _____
- _____
- _____
3. ¿Qué medida de tendencia central consideras que es más representativa de la calificación promedio de los hombres? Justifica tu respuesta. _____
- _____
- _____

Ahora enfócate en cómo la forma en que analizas los datos, mediante una gráfica, puede llevarte a conclusiones sorprendentes; por ejemplo, en un estudio médico, se puede tener el caso en que un tratamiento pareciera ser menos efectivo cuando observamos los resultados en su totalidad; sin embargo, al desglosar los datos en diferentes grupos, de repente, el mismo tratamiento pareciera ser más efectivo en cada uno de esos grupos individuales, ¿cómo es posible que algo que parece menos efectivo se convierta en algo más efectivo cuando lo dividimos? Este efecto se conoce como la **Paradoja de Simpson**.

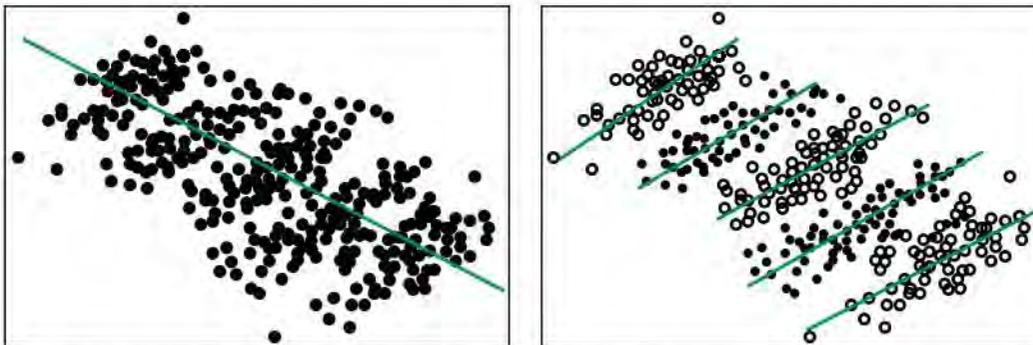


Figura 10.4. Gráficos de dispersión que ejemplifican la Paradoja de Simpson.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

¡DISCRIMINACIÓN!

Este caso, que aparece por todas partes en la literatura, se trata de lo que sucedió en la Universidad de California, en Berkeley; que una persona fue acusada de discriminación por género en las admisiones universitarias en 1973, la base de la demanda fue la siguiente Tabla 10.1 que contiene las solicitudes de admisión para el verano, distribuidas por género. En la demanda contra la universidad argumentaron que los hombres tenían mayor posibilidad de ser elegidos y, por lo tanto, había una clara discriminación por género, porque una diferencia tan grande no podía deberse al azar.

Por lo tanto, la universidad procedió a examinar los seis principales departamentos o facultades de forma individual; se encontró entonces que, en ninguna facultad existía sesgo contra las mujeres, de hecho, la mayoría de los departamentos tenía un pequeño, pero estadísticamente significativo sesgo en contra de los hombres como lo podemos observar en la Tabla 10.2.

	Solicitudes	Admisiones
Hombres	8442	44%
Mujeres	4321	35%

Tabla 10.1. Solicitud y admisión por género de la Universidad de California, en Berkeley, 1973.
Fuente: Elaboración propia, con base en https://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja_de_Simpson (Word, 2023)

Estás frente a una clara Paradoja de Simpson, la conclusión a la que llegaron los investigadores del fenómeno fue que, las mujeres solían presentarse en campos muy competidos que tenían un bajo porcentaje de admisiones, como el departamento de lengua inglesa; mientras que los hombres solían presentarse en departamentos o facultades con mayor competencia y mayor porcentaje de admisiones, como ingeniería y química.

Observa en la Tabla 10.2 que, en los departamentos A y B se alcanza a apreciar que las solicitudes de hombres son mayores que las solicitudes de las mujeres, pero el porcentaje de admisiones fue mayor el de mujeres que de los hombres. En las Figuras 10.3 y se observa de forma gráfica lo explicado anteriormente, es decir, el número de solicitudes tanto de hombres y mujeres, como sus porcentajes de admisión en los departamentos de la universidad.

Departamento	Hombres		Mujeres	
	Solicitudes	Admisiones	Solicitudes	Admisiones
A (Ingeniería)	825	62%	108	82%
B (Química)	560	63%	25	68%
C	325	37%	593	34%
D	417	33%	375	35%
E	191	28%	393	24%
F (L. Inglesa)	272	6%	341	7%

Tabla 10.2. Solicitud y admisión a los departamentos por género, de la Universidad de California, en Berkeley, 1973.

Fuente: Elaboración propia, con base en https://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja_de_Simpson (Word, 2023)

¿Qué es la Paradoja de Simpson?

La Paradoja de Simpson es un fenómeno estadístico en el cual una tendencia o efecto que parece presente en diferentes grupos de datos desaparece o incluso se invierte cuando esos grupos se combinan en uno solo. Es como cuando un ilusionista hace que un truco parezca una cosa en el escenario (engañando al sentido de la vista) y, cuando se revela el truco, se descubre que era completamente diferente a lo que el sentido de la vista percibió. A menudo ocurre cuando las relaciones entre variables no son obvias a primera vista y solo se hacen evidentes al observar datos separados en subgrupos; por lo que esto puede llevar a conclusiones contradictorias o paradójicas como en las Figuras 10.5 y 10.6.

Universidad de California, en Berkeley, 1973.

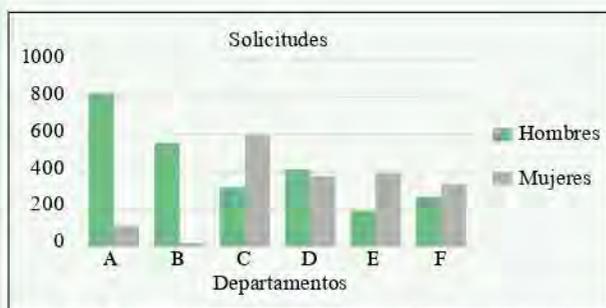


Figura 10.5. Frecuencia de las solicitudes en cada departamento por género. Fuente: Elaboración propia, con base en: https://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja_de_Simpson (Excel, 2023).

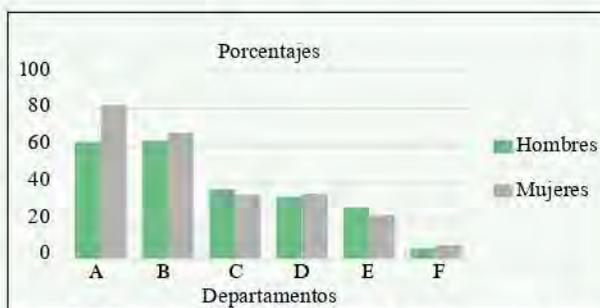


Figura 10.6. Porcentaje de las admisiones en cada departamento por género. Fuente: Elaboración propia, con base en: https://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja_de_Simpson (Excel, 2023).

Actividad de aprendizaje 10.5

- Haz un análisis, a tu juicio, de cuál sería la forma adecuada de asignar un lugar en la tabla por preseas obtenidas en una justa olímpica, ya que existe el criterio de que el país que obtenga mayor número de medallas de oro encabeza la tabla de posiciones. No obstante, pueden existir países que, en total, obtuvieron un mayor número de preseas. Entonces la interrogante sería, ¿los lugares deben regirse por las medallas de oro o por el total de medallas obtenidas? _____

Medallero de los Juegos Olímpicos Tokyo 2020

Posición	Equipo	Oro	Plata	Bronce	Total
1	Estados Unidos	39	41	33	113
2	China	38	32	18	88
3	Japón	27	14	17	58
4	Reino Unido	22	21	22	65
5	COR*	20	28	23	71
6	Australia	17	7	22	46
7	Países bajos	10	12	14	36
8	Francia	10	12	11	33
9	Alemania	10	11	16	37
10	Italia	10	10	20	40
84	México	0	0	4	4

* Comité Olímpico Ruso.

Tabla.10.3. Medallero de los Juegos Olímpicos de Tokyo 2020. Fuente: Elaboración propia, con base en: <https://www.bbc.com/mundo/deportes-57970068>

- A partir de la tabla de posiciones anterior, elabora un gráfico de barras utilizando los datos de las columnas **equipo/país** y **total**; luego, elabora otro utilizando las columnas: oro, plata y bronce. ¿Qué observas en ambas gráficas? _____

- En la tabla de la derecha, escribe en la primera columna los cinco países por su posición en la tabla y en la segunda columna, los cinco países por el total de medallas obtenidas.

Por la posición en la tabla	Por el total de medallas
1.	1.
2.	2.
3.	3.
4.	4.
5.	5.

- ¿Notas algún cambio en la posición de los países? _____

- ¿A qué se debe el cambio? _____

- ¿Qué tiene más importancia para ti, la cantidad de medallas totales o la cantidad de medallas de oro? _____

- Entonces, si el Comité Olímpico Ruso (COR) dice que quedó clasificado como el tercer lugar en la Olimpiada Tokio 2020, desde tu punto de vista, ¿será cierto? Argumenta tu respuesta. _____

- ¿Qué crees que pensaría Japón al respecto? _____

En los Juegos Olímpicos, según las reglas del Comité Olímpico Internacional (COI) la clasificación de los países en la tabla de medallas se ordena por el número de medallas de oro ganadas; si hay empate en las de oro, se compara el número de medallas de plata; y si todavía hay un empate, se recurre al número de medallas de bronce.

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 10. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el estudio de datos atípicos y variables de confusión.			
Participé activamente con ideas para identificar datos atípicos y variables de confusión.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas sobre datos atípicos y variables de confusión.			
Justifiqué el efecto de un dato atípico al comparar dos gráficos de puntos (M1-C2).			
Comuniqué las posibles causas de la paradoja de Simpson que ayuden a identificar variables de confusión (M2-C4).			
Hice gráficos y tablas para evitar el efecto de la paradoja de Simpson (M1-C2).			

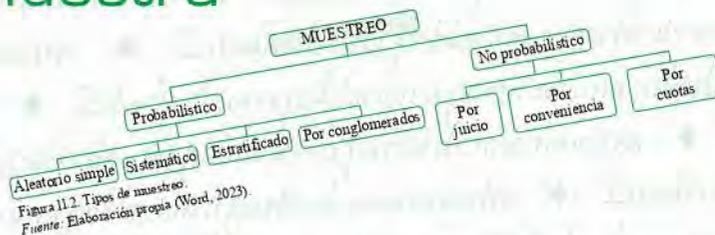
Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 10 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el estudio de datos atípicos y variables de confusión.			
Participó activamente con ideas para identificar datos atípicos y variables de confusión.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas sobre datos atípicos y variables de confusión.			
Justificó el efecto de un dato atípico al comparar dos gráficos de puntos (M1-C2).			
Comunicó las posibles causas de la paradoja de Simpson que ayuden a identificar variables de confusión (M2-C4).			
Hizo gráficos y tablas para evitar el efecto de la paradoja de Simpson (M1-C2).			

Nombre y firma de quien coevalúa

Estudio de una población a partir de una muestra



Progresión de aprendizaje 11

Identifica, ante la imposibilidad de estudiar la totalidad de una población, la opción de extraer información de ésta a través del empleo de técnicas de muestreo, en particular, valora la importancia de la aleatoriedad al momento de tomar una muestra.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C2. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			
M2-C3 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno	A			
	C			
	H			

Se realizó un estudio sobre el impacto de la actitud hacia las matemáticas en el rendimiento académico de los estudiantes de preparatoria. Se aplicó un cuestionario de 18 preguntas a una muestra de 180 estudiantes de primer año. Los resultados mostraron que a mayor actitud positiva mayor rendimiento académico.

1. Escribe como seleccionarías de seis salones de primer año a los 180 estudiantes que responderán el cuestionario.

Escribe tu razonamiento y las posibles ventajas o desventajas de ese método.

2. Analiza las diferentes opciones de obtener una muestra y evalúa, que tan adecuadas son, así como, las implicaciones que tienen para el estudio.
 - Opción A: elegir al azar 180 estudiantes de la base de datos de la escuela y enviarles el cuestionario por WhatsApp.
 - Opción B: elegir a los primeros 180 estudiantes que entren a la biblioteca de la escuela y aplicarles el cuestionario en persona.
 - Opción C: elegir a 30 estudiantes del grupo 1-1, 30 del grupo 1-2, 30 del grupo 1-3, 30 del grupo 1-4, 30 del grupo 1-5 y 30 del grupo 1-6.
3. Describe las ventajas y desventajas de cada opción de obtener una muestra; considera aspectos como representatividad, accesibilidad, diversidad y precisión de la muestra.

En la mayoría de las investigaciones, pocas veces, es posible estudiar a toda la población, por lo que se selecciona una muestra y desde luego, se pretende que esta muestra sea representativa de la población. Las muestras se utilizan para ahorrar tiempo y recursos. Las técnicas de muestreo son un conjunto de métodos estadísticos que permiten seleccionar una muestra representativa de una población.

La **muestra** es un subgrupo de la población de interés sobre el cual se recolectarán datos. Digamos que es un subconjunto de elementos que pertenecen a ese conjunto definido en sus características al que llamamos **población** y deberá ser representativo de dicha población.



Figura 11.1. Población y muestra.
Fotografía: Asia Cecilia Carrasco Valenzuela e Iliana Tirado Olivás (Google, 2023).

11.1. Técnicas de muestreo

Existen dos tipos de técnicas de muestreo: el *muestreo no probabilístico* y el *muestreo probabilístico*.



Figura 11.2. Tipos de muestreo.

Fuente: Elaboración propia (Word, 2023).

En las **muestras probabilísticas** todos los elementos de la población tienen la misma posibilidad de ser seleccionados y se obtienen definiendo las características de la población y el tamaño de la muestra. Este tipo de muestreo es considerado el más riguroso y confiable, ya que permite calcular estimaciones precisas y cuantificar la incertidumbre asociada con ellas.

¿Cómo se obtiene el número premiado en un sorteo de lotería? En las loterías tradicionales, a partir de las esferas con un dígito que se extraen (después de revolverlas mecánicamente en una tómbola) hasta formar el número, de manera que todos los números tienen la misma probabilidad de ser elegidos.

En las **muestras no probabilísticas** la elección de los elementos **no depende de la probabilidad**, sino, mediante un juicio subjetivo del investigador. Este tipo de muestreo puede ser útil en situaciones donde no es posible realizar un muestreo probabilístico debido a limitaciones de dinero y tiempo.

Actividad de aprendizaje 11.1

Determina si cada uno de los siguientes métodos para seleccionar a los participantes de una encuesta, corresponde a un muestreo probabilístico (P) o no probabilístico (NP).

Una empresa encuestadora requiere conocer la opinión de los ciudadanos sobre quién le gustaría que fuera el próximo candidato a gobernador. Para ello, consultó el directorio telefónico y decidió seleccionar a algunos de ellos para preguntarles si desean participar en dicha encuesta telefónica.

1. () La empresa selecciona a los primeros 500 ciudadanos del directorio telefónico.
2. () Elige al azar a 500 clientes del directorio telefónico.
3. () La empresa selecciona a los 500 ciudadanos que más han gastado en telefonía en los últimos años.
4. () La empresa selecciona a 500 ciudadanos al azar, de los cuales, 50 corresponden a cada uno de los códigos postales de la ciudad.

Actividad de aprendizaje 11.2.

Determina si cada método es: probabilístico o no probabilístico, de acuerdo con la siguiente situación. En tu escuela el director desea saber cuál deporte es el de mayor preferencia entre sus estudiantes. El director tiene acceso a los datos de 90 estudiantes. A continuación, se presentan cuatro métodos diferentes que el director podría utilizar para seleccionar los grupos para su estudio.

1. Seleccionar los grupos con mayor número de estudiantes. _____
2. Elegir los grupos con el mejor promedio de calificaciones. _____
3. Seleccionar grupos al azar. _____
4. Elegir grupos al azar de cada uno de los tres grados escolares. _____

11.2. Muestreo probabilístico

El **muestreo probabilístico** es esencial en los diseños de investigación donde se pretende hacer estimaciones de variables en la población, pues su objetivo es obtener una muestra representativa que te permita hacer inferencias sobre la población a partir de los resultados obtenidos.

Para obtener una muestra probabilística son necesarios dos procedimientos:

1. Calcular un tamaño de **muestra** (n) que sea representativo de la población.
2. Seleccionar los elementos muestrales de manera que al inicio todos tengan la misma posibilidad de ser elegidos.

El cálculo de un tamaño de **muestra** (n) puede hacerse mediante la aplicación estadística “EST calcula tu muestra” en tu celular. También usando las fórmulas clásicas que se han desarrollado, pero es más tardado y el resultado es el mismo o muy similar al que proporciona la aplicación.

Luego, debes aplicar un método de muestreo probabilístico como el aleatorio simple, estratificado, sistemático o por conglomerados, para seleccionar los elementos muestrales de manera que al inicio todos tengan la misma posibilidad de ser elegidos.



Figura 11.3. Aplicación para calcular tamaño de una muestra.

Fuente: EST calcula tu muestra (Android, 2023).

Los tipos de muestreo probabilísticos son:

Aleatorio simple. Para poder realizar este tipo de muestreo, todos los individuos de la población deben estar numerados en un listado, a partir de un listado de números aleatorios. Si no dispones del listado de individuos, no se podrá utilizar esta técnica de muestreo.

Ejemplo: para seleccionar una muestra de cinco estudiantes de una población de 50, asigna un número a cada individuo y selecciona cinco números al azar. Puedes utilizar la aplicación “Generar números aleatorios” en tu celular.

Estratificado. En este tipo de muestreo se divide a la población en subgrupos o estratos que tienen alguna ca-



Figura 11.4. Muestreo aleatorio simple. Fotografía: Asia Cecilia Carrasco Valenzuela e Iliana Tirado Olivas (Google, 2023).

racterística común. La selección de sujetos dentro de cada estrato se hace aleatoriamente. La estratificación se suele hacer en función de diferentes variables o características: género, edad, situación laboral, etc. La elección de los elementos en cada estrato se realiza mediante algún método de muestreo aleatorio simple.

Ejemplo: en una población de estudiantes de preparatoria, considera los estratos, hombres y mujeres, y selecciona una muestra de cada uno.

Sistemático. Es similar al aleatorio simple: los sujetos deben estar identificados. Éstos no se eligen a partir de un listado de números aleatorios, sino que, se hace sistemáticamente eligiendo a uno de cada cierto número de sujetos. En el muestreo sistemático, primero se selecciona un elemento aleatoriamente, y el resto de los elementos de la muestra se seleccionan utilizando un intervalo fijo, que indica la separación entre los elementos sucesivos de la muestra.

Ejemplo: para seleccionar una muestra de cuatro estudiantes de una población de 22, elige una persona al azar y posteriormente, una de cada cinco en un listado con todos los estudiantes.

Conglomerados. En este tipo de muestreo, cada conglomerado se pretende que sea una parte de toda la población, es decir, grupos heterogéneos. Posteriormente, se seleccionan algunos conglomerados al azar que conforman la muestra y se analiza cada individuo perteneciente a los conglomerados seleccionados. En este tipo de muestreo hay una selección en varias etapas, todas con procedimientos probabilísticos.

Ejemplo: para seleccionar una muestra de estudiantes de una escuela, es posible dividirla en grados, después, selecciona algunos de ellos al azar.



Figura 11.5. Muestreo estratificado.
Fotografía: Asia Cecilia Carrasco Valenzuela e Iliana Tirado Olivas (Google, 2023).



Figura 11.6. Muestreo sistemático.
Fotografía: Asia Cecilia Carrasco Valenzuela e Iliana Tirado Olivas (Google, 2023).



Figura 11.7. Muestreo por conglomerados.
Fotografía: Asia Cecilia Carrasco Valenzuela e Iliana Tirado Olivas (Google, 2023).

Actividad de aprendizaje 11.3

Determina el tipo de muestreo aplicado para cada situación.

1. Se realizó un juego en el que se elige a la ganadora del juego y, a partir de ahí, se empezó a numerar cada cinco lugares. Estas fueron las muestras finales. _____
2. Asignar un número a cada alumno de la lista y luego utilizar un generador de números aleatorios, para seleccionar 20 estudiantes. _____
3. Se quiere estimar el número de butacas en mal estado de la preparatoria, se sabe que hay 30 aulas, cada una con aproximadamente 50 butacas, por lo que, se eligen al azar 5 aulas y se procede a revisar cada una de las butacas de dichas aulas. _____

4. Se dividió al grupo de primer semestre en subconjuntos según edades, de 15 y 16 años, y luego, se seleccionó una muestra de cada uno utilizando un muestreo aleatorio simple.

Actividad de aprendizaje 11.4

Selecciona el tipo de muestreo utilizado en cada situación.

→ Aleatorio simple → Estratificado → Conglomerados → Sistemático

Imagina que en un cine se quiere realizar una encuesta para conocer la opinión de los usuarios sobre sus instalaciones. La empresa tiene acceso a una lista de todos los usuarios y decide seleccionar a algunos de ellos para participar en la encuesta.

Indica el método que se aplica en el cine para seleccionar a los participantes de la encuesta:

1. Selecciona a los usuarios múltiples de 30 en la lista. _____
2. Divide a los usuarios según el fraccionamiento donde viven y posteriormente, selecciona algunos fraccionamientos al azar para formar parte de la muestra. _____
3. Asigna un número a cada usuario en la lista, después utiliza un generador de números aleatorios para seleccionar 80 números. _____
4. Primero divide a los usuarios según su edad, luego selecciona una muestra de cada estrato utilizando un muestreo aleatorio simple. _____

11.3. Muestreo no probabilístico

En el muestreo no probabilístico, la elección de los elementos no depende de la probabilidad, sino de causas relacionadas con las características de la investigación o de quien selecciona la muestra. Aclaremos que el procedimiento no es mecánico, ni se usan **fórmulas de probabilidad, tan solo**, depende del proceso de toma de decisiones de una investigación o de un grupo de investigadores, y desde luego, las muestras seleccionadas obedecen a otros criterios de investigación.

Este tipo de muestreo es importante en la investigación porque permite seleccionar una muestra de una población de manera rápida y económica. Aunque esta técnica no garantiza que la muestra sea representativa de la población, es útil en situaciones en las que es difícil o costoso obtener una muestra probabilística.

El muestreo no probabilístico es ampliamente utilizado en estudios exploratorios y en investigaciones cualitativas, así como, en estudios de mercado y en la investigación social y política.

Los tipos de muestreo no probabilísticos más utilizados son:

Muestreo	En qué consiste	Ejemplo
Por conveniencia	Consiste en elegir la muestra, de acuerdo con ciertas características que le sean convenientes al investigador, así como, a los encuestados en función de su disponibilidad y facilidad de acceso.	El investigador pregunta a las personas si están dispuestas a participar en el estudio.
Por juicio	El investigador emplea su propio juicio para elegir los individuos que debe incluir en la muestra. El investigador elige, de manera deliberada, una muestra para confirmar su opinión.	Si quieres estimar cuánto gasta una persona que va de compras a un centro comercial extraes una muestra entre los compradores que parecen haber gastado cierta cantidad.
Por cuotas	Es similar al muestreo aleatorio estratificado, pero la diferencia radica en que la muestra se elige de forma subjetiva.	El investigador elige los elementos que van a pertenecer a la muestra tomando en cuenta sus propios términos.

Actividad de aprendizaje 11.5

Determina qué tipo de muestreo no probabilístico se está utilizando.

➤ **Por conveniencia**

➤ **Por juicio**

➤ **Por cuotas**

1. Deseas conocer la opinión sobre una crema aromática corporal. Para la selección optas por abordar a mujeres en el supermercado, y les preguntas si están dispuestas a participar en el estudio. _____
2. Si queremos estimar cuánto gastan las personas en el cine, una opción es encuestar a las familias que asisten al cine ese día para extraer una muestra. _____
3. Se está estudiando el machismo en el bachillerato, para ello, primero se decidió dividir la población total entre hombres y mujeres, y luego se elige un número determinado de participantes de cada grupo. _____

11.4. La encuesta

La encuesta es una herramienta fundamental en la investigación. Permite recopilar datos sobre actitudes, percepciones o características de los participantes a través de preguntas cerradas; así como, información sobre las experiencias, opiniones o características de los sujetos observados, mediante preguntas abiertas. Para diseñar una encuesta es importante que definas claramente, el objetivo de la investigación, elabores preguntas claras y concisas, elijas la técnica de muestreo y selecciones el tipo de encuesta más adecuado (como encuestas presenciales, en línea o telefónicas).

La **definición del objetivo** es fundamental para comprender qué aspectos se buscan indagar dentro de la población. Este es un punto clave para el diseño preciso de las preguntas en la encuesta y para la elección acertada de la técnica de muestreo. Un objetivo claro, proporciona la dirección necesaria para recabar datos relevantes y significativos, asegurando que la encuesta sea efectiva y capaz de ofrecer conclusiones sólidas.

Es fundamental que las **preguntas** en la encuesta sean claras, concisas y pertinentes con respecto al objetivo planteado. Se sugiere la inclusión, tanto preguntas abiertas como cerradas para obtener una visión integral de la información requerida. Asimismo, es esencial evitar sesgos y confusiones en las preguntas, ya que podrían comprometer la validez de los resultados obtenidos.

La selección de la **técnica de muestreo** apropiada está ligada al propósito de la encuesta y las particularidades de la población estudiada. En busca de representatividad, se sugiere el empleo de técnicas de muestreo probabilístico, como el muestreo aleatorio simple o el estratificado, que contribuyen a asegurar una muestra representativa y confiable de la población.

Una vez definida la técnica de muestreo, se procede a la selección de participantes y la **aplicación de la encuesta**. La obtención de resultados confiables depende en gran medida de la rigurosidad aplicada en la ejecución precisa de la técnica de muestreo seleccionada.

Por último, los resultados son sometidos a un **análisis** exhaustivo utilizando diversas técnicas con el objetivo de extraer información valiosa sobre la población estudiada. Buscando extraer información significativa y relevante que pueda ser útil para la toma de decisiones o la formulación de recomendaciones.

A manera de ejemplo, si el objetivo es evaluar los hábitos alimenticios de los estudiantes de bachillerato para identificar los tipos de alimentos más consumidos durante el horario escolar, sus preferencias alimenticias, el acceso a opciones saludables en la escuela y la percepción sobre la influencia de la alimentación en su rendimiento académico. Para ello, puedes aplicar la siguiente encuesta.

Encuesta sobre los alimentos que consumen los estudiantes de bachillerato.

DATOS DEMOGRÁFICOS

Edad: [_____] Género: [_____] Grado escolar: [_____]

Circula, en cada caso, la letra con la opción que consideres más adecuada.

Hábitos alimenticios:

1. ¿Con qué frecuencia consumes alimentos durante el horario escolar? []
a) Nunca b) Ocasionalmente c) A menudo d) Siempre
2. ¿Sueles desayunar antes de ir a la escuela? []
a) Sí, siempre
b) A veces
c) No, nunca
3. ¿Prefieres llevar comida de casa o comprar en la cafetería de la escuela? []
a) Llevo comida de casa siempre
b) A veces llevo comida de casa y a veces compro en la cafetería
c) Siempre compro en la cafetería
d) Nunca compro en la cafetería

Tipo de alimentos consumidos:

4. ¿Qué tipo de alimentos consumes con mayor frecuencia durante el horario escolar? . . . []
(Selecciona todas las que correspondan)
a) Frutas
b) Verduras
c) Bocadillos (galletas, panes, etc.)
d) Sándwiches o bocadillos preparados en casa
e) Comida rápida (hamburguesas, pizza, tortas, etc.)
f) Comida caliente (arroz, pasta, consomé, cazuela, etc.)
g) Otros (especifica) _____
5. ¿Tienes acceso a opciones de alimentos saludables en la escuela? []
a) Sí, hay opciones saludables disponibles
b) No, las opciones saludables son limitadas
c) No estoy seguro

Preferencias y opiniones:

6. ¿Qué mejorarías o cambiarías en las opciones de alimentos ofrecidas en la escuela? . . . []
 - a) Mayor variedad de opciones saludables
 - b) Mejor calidad de los alimentos
 - c) Precios más accesibles
 - d) Otros (especifica) _____
7. ¿Crees que tu alimentación durante el horario escolar afecta tu rendimiento académico?. []
 - a) Sí
 - b) No
 - c) No estoy seguro
8. ¿Qué cambiarías o mejorarías sobre el tipo de alimentos que venden en la escuela? _____

Actividad de aprendizaje 11.6.

Aplicación de una encuesta.

Tema: Los adolescentes utilizan sus teléfonos móviles para realizar diversas actividades. En equipo investiga qué actividades realizan los estudiantes con sus celulares.

1. Elabora al menos cinco preguntas cerradas y una abierta, que te permitan obtener información. Las preguntas cerradas deben tener opciones de respuestas predefinidas.
2. Realiza un muestreo probabilístico y aplica la encuesta a una muestra de estudiantes. Trata de aplicar al menos 10 encuestas.
3. Analiza los resultados de la encuesta, elabora un informe escrito, luego prepara una exposición de manera oral con apoyo de una presentación en PowerPoint, los hallazgos y conclusiones. Incluye gráficos o tablas que ilustren los resultados obtenidos y cita las fuentes de información consultadas.
4. En la siguiente sesión entrega el informe y la presentación oral de los resultados de la encuesta.

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la población? _____

2. ¿Cuál es la muestra en este estudio? _____

3. ¿Qué tipo de muestreo probabilístico utilizaste? _____

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 11. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el estudio del muestreo probabilístico y no probabilístico.			
Participé activamente con ideas para identificar el tipo de muestreo en el tipo de estudio a realizar.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas sobre los tipos de muestreos y sus características.			
Elegí el tipo de muestreo según el tipo de estudio que se realiza: diseño de experimentos o estudio observacionales confusión (M1-C2).			
Determiné los parámetros que describen a una población en el cálculo de una muestra (M2-C3).			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 11 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el estudio del muestreo probabilístico y no probabilístico.			
Participó activamente con ideas para identificar el tipo de muestreo en el tipo de estudio a realizar.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas sobre los tipos de muestreos y sus características.			
Eligió el tipo de muestreo según el tipo de estudio que se realiza: diseño de experimentos o estudio observacionales (M1-C2).			
Determinó los parámetros que describen a una población en el cálculo de una muestra (M2-C3).			

Nombre y firma de quien coevalúa

Los estudios observacionales y el diseño de experimentos



Progresión de aprendizaje 12

Valora las ventajas y limitaciones de los estudios observacionales y los compara con el diseño de experimentos, a través de la revisión de algunos ejemplos tomados de diversas fuentes.

Metas de aprendizaje	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
MI-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A		
	C		
	H		

Hay estudios que proporcionan una visión inicial y descriptiva de un fenómeno, lo que puede ser útil para generar hipótesis o para comprender mejor un comportamiento sin interferir en él. Hay otros que permiten establecer relaciones causales más sólidas al manipular variables, pero también requieren un control cuidadoso de otros factores que podrían influir en los resultados.

Actividad de aprendizaje 12.1

Identifica, a tu juicio, si cada uno de los siguientes ejemplos corresponden a un estudio de carácter observacional o experimental.

1. Un investigador observa y registra el comportamiento de las personas en una plaza pública durante diferentes momentos del día, sin interferir en sus acciones. Observa cuántas personas están usando sus teléfonos móviles, qué tipo de actividades realizan (navegar por internet, enviar mensajes, realizar llamadas, etc.), la duración de cada actividad y otros detalles que consideres importantes.

El investigador podría utilizar un cuaderno para tomar notas, o incluso una cámara para registrar visualmente la actividad sin identificar a las personas. Anota la hora del día, la ubicación de la persona en la plaza, el tipo de dispositivo utilizado, etc.

Al revisar los datos recopilados, el investigador puede encontrar patrones sobre cuándo y cómo las personas utilizan sus dispositivos móviles en espacios públicos. Puede identificar tendencias, como un aumento en el uso de dispositivos móviles durante ciertas horas del día o preferencias de actividades en función de la edad o el género.

[Es un estudio _____].

2. Se seleccionan dos grupos de participantes al azar. El Grupo A se designa como el grupo control y el Grupo B como el grupo experimental. Ambos grupos son similares en edad, sexo y nivel de condición física.

Durante cuatro semanas, el Grupo B realizó una rutina de ejercicio cardiovascular (correr, caminar rápido, etc.) durante 30 minutos al día, cinco días a la semana. El Grupo A no efectuó ningún cambio en su rutina diaria. Al inicio del estudio, se midió la frecuencia cardíaca en reposo de ambos grupos; luego, se tomaron de nuevo las medidas de la frecuencia cardíaca; y finalmente, después de cuatro semanas se toma la frecuencia cardíaca de ambos grupos.

Se compararon los datos de la frecuencia cardíaca en reposo entre el Grupo A (grupo de control), y el Grupo B (grupo experimental) después de las cuatro semanas. Si la frecuencia cardíaca en reposo del Grupo B disminuye significativamente, en comparación con el Grupo A, se podría concluir que el ejercicio tuvo un efecto en la reducción de la frecuencia cardíaca en reposo.

[Es un estudio _____].

Los estudios observacionales y experimentales tienen enfoques diferentes, así como ventajas y desventajas; en este sentido, hay dos preguntas a las que debes dar respuesta al término de la progresión de aprendizaje:

- ¿Cuáles son las diferencias entre los estudios observacionales y experimentales?
- ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de cada tipo de estudio?

12.1. Estudios observacionales

El uso masivo del celular es una tendencia que ha cambiado la forma de comunicarse y de interactuar entre las personas. Este fenómeno ha llamado la atención de investigadores, debido a que no sólo proporciona información valiosa sobre la interacción humana con la tecnología, sino que también, sobre las preferencias de los usuarios, con base en las consultas hechas en Internet. Esto tiene implicaciones significativas en la mercadotecnia móvil; por otra parte, su uso excesivo presenta la disminución de las horas de sueño o miedo a salir sin el celular, pues su dependencia ha llevado a algunas personas a ser incapaces de controlar o disminuir su uso. Estas problemáticas y otras más, las puedes investigar mediante la implementación de un estudio observacional.

Un **estudio observacional** implica la observación de fenómenos o comportamientos sin intervenir directamente en ellos. Esto es, el investigador observa individuos, fenómenos o poblaciones, sin intervenir ni modificar las condiciones naturales (tal como se desarrollan en su entorno habitual). Con el objetivo de recopilar datos sobre su comportamiento (costumbres o reacciones de un sujeto o grupo) mediante métodos como la observación directa, encuestas, análisis de registros médicos o sociales, entre otros. Todos ellos se analizan para identificar patrones, tendencias o relaciones entre variables (no se garantiza el descubrimiento de relaciones causales) para comprender mejor cómo interactúan diferentes factores en un entorno dado.

Por ejemplo, el comité de padres de familia puede solicitar a la dirección de un centro escolar un estudio sobre el consumo de comida chatarra por estudiantes en las cafeterías de la escuela, para comprender patrones alimenticios y preferencias dentro del entorno escolar. Esto implica la observación y recopilación de datos sobre los patrones de consumo de alimentos del estudiantado sin la intervención del investigador en sus elecciones alimenticias. Este estudio proporcionaría una comprensión detallada de cómo los estudiantes eligen y consumen comida chatarra, en un entorno escolar, sin embargo, no puedes establecer relaciones causales entre el consumo de productos chatarra y otros factores, ya que no hay manipulación directa de variables, ni control sobre las condiciones.

Actividad de aprendizaje 12.2

Características, ventajas y desventajas de un estudio observacional.

Usa la inteligencia artificial para identificar las características principales, ventajas y desventajas de un estudio observacional.

Características principales de un estudio observacional	
Ventajas	Desventajas

Existen diferentes tipos de estudios observacionales, cada uno con enfoques específicos para recolectar datos e información sin intervenir en las variables observadas. Los más comunes son:

Estudios de cohortes: se da seguimiento a un conjunto de individuos a lo largo de un periodo determinado con el propósito de investigar un evento particular. Una cohorte consiste en un grupo de personas que comparten una característica común, como la edad, el sexo o la ocupación, por ejemplo, dar seguimiento a un grupo de fumadores y no fumadores, a lo largo de 10 años, para observar el desarrollo de enfermedades pulmonares.

Estudios de casos y controles: comparan individuos con una condición particular (casos) con aquellos que no la tienen (controles) para identificar factores de riesgo, por ejemplo, si tienes una empresa en la que la eficiencia del uso de la tecnología permite obtener mayores ingresos, te interesaría saber si las diferencias en el uso de la tecnología están asociadas con un mejor desempeño laboral. En este estudio, los casos son los empleados con alto rendimiento laboral y los controles, los empleados con rendimiento laboral promedio o bajo.

Estudios transversales: recopilan datos de una población en un momento específico en el tiempo (sin continuidad en el tiempo). Se observan múltiples variables, al mismo tiempo, para establecer asociaciones, por ejemplo, si quieres analizar los hábitos de estudio que tus compañeros de grupo implementaron durante el primer año de estudio en el bachillerato puedes encuestarlos al final del ciclo escolar preguntando por las horas dedicadas al trabajo académico, uso de recursos educativos, etc.

Actividad de aprendizaje 12.3

Identifica el tipo de estudio observacional.

1. Encuesta de satisfacción laboral

Objetivo: determinar el nivel de satisfacción laboral en una empresa.

Método: se realiza un estudio donde se distribuye una encuesta a todos los empleados de la empresa en un momento específico para evaluar su satisfacción en relación con el ambiente laboral, la remuneración, las oportunidades de crecimiento, entre otros aspectos.

Este es un estudio observacional de tipo _____.

2. Enfermedades cardíacas y dieta.

Casos: personas con enfermedades cardíacas diagnosticadas.

Controles: personas sin enfermedades cardíacas (grupo de comparación).

Método: se desarrolla un estudio para comparar los patrones dietéticos entre ambos grupos buscando asociaciones entre ciertos tipos de alimentación y la incidencia de enfermedades cardíacas.

Este es un estudio observacional de tipo _____.

3. Seguimiento de desarrollo académico.

Objetivo: observar el impacto del estilo de enseñanza en el rendimiento académico.

Método: se elige un grupo de niños en edad preescolar y se les da un seguimiento durante 11 años. Se registran datos sobre el tipo de educación recibida, el ambiente familiar, la participación en actividades educativas extracurriculares, y se evalúa su rendimiento académico en diferentes etapas.

Este es un estudio observacional de tipo _____.

Si bien, los estudios observacionales ofrecen información valiosa sobre las relaciones entre variables, sin embargo, su limitación radica en la dificultad para establecer relaciones causales directas, dado que no involucran la manipulación controlada de variables independientes. No obstante, estos estudios pueden proporcionar indicios que orienten hacia la realización de un estudio experimental posterior, permitiendo poner a prueba la relación identificada en el estudio observacional.

12.2. Estudios experimentales

En contraste con un estudio observacional, un **estudio experimental** implica la manipulación de variables para la observación y registro de los efectos causales, por ejemplo, un docente para innovar su proceso de enseñanza y aprendizaje, diseña un experimento para investigar cómo diferentes métodos de enseñanza afectan el rendimiento académico del estudiantado. Para tal fin, asigna aleatoriamente a los estudiantes a diferentes grupos (grupo control y grupo experimental); luego, en cada uno implementa un método de enseñanza diferente para medir su efecto en el rendimiento académico, y así, saber cuál método es mejor.

En el ejemplo anterior, el profesor investiga si hay una relación causal entre métodos de enseñanza y rendimiento académico, tomando en cuenta que puede haber otras variables (como el género, edad, nivel económico, estrato social, etc.), que no se controlaron y podrían influir en los resultados; a estas variables las conoces como variables de confusión.

Actividad de aprendizaje 12.4

Características, ventajas y desventajas de un estudio experimental.

Usa la inteligencia artificial para identificar las características principales, ventajas y desventajas de un estudio experimental.

Características principales de un estudio experimental	
Ventajas	Desventajas

12.3. ¿Cómo diseñar un experimento estadístico?

Como has observado, un estudio experimental implica que el investigador manipule conscientemente, una o varias variables independientes para observar el impacto que esta manipulación tiene sobre una variable dependiente. A fin de asegurar la validez y confiabilidad de los resultados, es importante seguir una serie de pasos en el diseño de un experimento estadístico. Estos pasos incluyen:

- Definir la **pregunta de investigación** y establecer una **hipótesis** sobre la variable dependiente a estudiar con relación a la independiente.
- Seleccionar la **población** y seleccionar mediante un método de muestreo adecuado una **muestra** representativa de la población.
- Identificar la **variable dependiente y las independientes** asegurándose de que sean cuantificables y observables.
- **Asignar aleatoriamente** los elementos de la muestra a dos grupos: el grupo de control, sin manipulación de variables independientes, y el grupo experimental, que sí experimenta con dichas variables.
- **Realizar la experimentación** siguiendo procedimientos estandarizados que garanticen resultados coherentes en repeticiones posteriores del experimento.
- **Analizar los datos** sometiendo los resultados a pruebas y análisis estadísticos para aceptar o rechazar la hipótesis.

- **Generar conclusiones** a partir del análisis de los datos para obtener y discutir las conclusiones sobre el experimento y la hipótesis.

En un estudio experimental:

- **Las variables independientes** son aquellas que el investigador manipula o controla deliberadamente. Se espera que estas variables causen un efecto en la variable dependiente.
- **La variable dependiente** es la variable que se observa y mide para determinar el efecto de la variable independiente o las variables manipuladas.
- **El grupo experimental** recibe la intervención o tratamiento experimental, es decir, la manipulación de la variable independiente.
- **El grupo de control** es el grupo de comparación que no recibe la intervención o tratamiento experimental. Sirve como punto de referencia para comparar los efectos observados en el grupo experimental.
- **La asignación aleatoria**, es un procedimiento estadístico para asignar a los participantes al azar a los grupos experimental y de control, y así, controlar mejor las variables de confusión y asegurar que las diferencias observadas sean el resultado de la intervención y no de otras causas.

Ejemplo 12.1

Estudios experimentales.

Experimento 1. Estudio sobre el efecto del ejercicio en la reducción del estrés:

- **Pregunta de investigación:** ¿cuál es el efecto de un programa de ejercicio aeróbico supervisado durante ocho semanas en la reducción de los niveles de estrés percibido en adultos sanos?
- **Hipótesis:** se espera que un programa de ejercicio **aeróbico durante ocho semanas** reduzca los niveles de estrés en adultos sanos.
- **Variable independiente:** programa de ejercicio (grupo A: ejercicio aeróbico tres veces por semana durante ocho semanas, grupo B: sin ejercicio).
- **Variable dependiente:** niveles de estrés medidos mediante cuestionarios validados (por ejemplo, escala de estrés percibido).
- **Método:** se reclutan 50 adultos sanos y se asignan aleatoriamente a dos grupos. El grupo A sigue un programa de ejercicio aeróbico supervisado durante ocho semanas, mientras que el grupo B no realiza ejercicio adicional. Antes y después del período de ocho semanas, se administran cuestionarios para medir los niveles de estrés percibido en ambos grupos.

Experimento 2. Investigación sobre el efecto de la música en el aprendizaje de nuevos idiomas:

- **Pregunta de investigación:** ¿tiene la música clásica un impacto positivo en la retención de vocabulario en estudiantes de idiomas?
- **Hipótesis:** se espera que estudiar un vocabulario escuchando música clásica mejore su retención.
- **Variable independiente:** tipo de música (grupo A: música clásica, grupo B: sin música).
- **Variable dependiente:** retención de vocabulario medida mediante pruebas de conocimiento de palabras en el nuevo idioma.
- **Método:** se recluta a un grupo de 40 estudiantes de idiomas y se dividen aleatoriamente en dos grupos. Durante un mes, el grupo A estudia vocabulario mientras escucha música clásica, mientras que el grupo B estudia en silencio. A fin de mes se administran pruebas de conocimiento de palabras en el nuevo idioma a ambos grupos.

Actividad de aprendizaje 12.5

Identificación de variables experimentales.

1. Analiza con cuidado el experimento 1 y completa lo faltante en los demás experimentos presentados.

Experimento 1. Efecto de las baterías sobre el brillo de una bombilla.

Pregunta de investigación: ¿cómo afecta la cantidad de baterías al brillo de la bombilla?

Variable independiente: número de baterías.

Variable dependiente: brillo de la bombilla.

Control de variables: grosor de los cables, tamaño de las baterías, tipo de bombillas, temperatura del cable.

Experimento 2. Efecto de fertilizantes en cultivos.

Pregunta de investigación: _____

Variable independiente: _____

Variable dependiente: _____

Control de variables: _____

Experimento 3. Aplicación de medicamentos para enfermos.

Pregunta detonante: _____

Variable independiente: _____

Variable dependiente: _____

Control de variables: _____

2. Diseña un experimento donde puedas identificar las variables experimentales.

Pregunta de investigación: _____

Variable independiente: _____

Variable dependiente: _____

Control de variables: _____

Método: _____

Los estudios experimentales son fundamentales para establecer relaciones de causa y efecto entre variables, ya que permiten controlar la influencia de factores externos y manipular variables para observar sus efectos directos. Son comunes en campos como en las humanidades, las ciencias sociales, las ciencias naturales y las ciencias exactas.

Actividad de aprendizaje 12.6

Diseño de estudios observacionales o experimentales.

Diferencia un estudio observacional de un estudio de diseño de experimentos justificando tu respuesta.

Estudio 1. Se hizo un estudio en el que se tomó una muestra aleatoria de adultos y se les preguntó sobre sus hábitos al levantarse por la mañana. Los datos mostraron que la gente que tomaba una caminata después de levantarse los volvería más activos y los agilizaría en las actividades del día.

¿Qué tipo de estudio es?

a) Observacional

b) Experimental

Justificación: _____

Estudio 2. Se tomó un grupo de agricultores de maíz y se dividió aleatoriamente en dos. A uno se le pidió agregar por una semana fertilizante orgánico a base de lixiviado de lombriz; mientras que, al otro, se le pidió agregar fertilizante orgánico compuesto por lixiviado de guano de murciélago. Luego los investigadores compararon el aspecto (características físicas) de cada grupo de agricultores.

¿Qué tipo de estudio es?

a) Observacional

b) Experimental

Justificación: _____

Estudio 3: Se asignaron aleatoriamente voluntarios a uno de los dos grupos: a un grupo se le indicó usar redes sociales como de costumbre (*Facebook* y *TikTok*), al otro grupo se les bloqueó el acceso a *Facebook* y *TikTok*. Los investigadores analizaron cuál grupo tendía a ser más feliz.

¿Qué tipo de estudio es?

a) Observacional

b) Experimental

Justificación: _____

Estudio 4. Se seleccionó una muestra aleatoria de estudiantes y se examinaron sus hábitos académicos. Cada estudiante se clasificó como usuario esporádico, moderado o frecuente en la realización de actividades escolares como tareas y trabajos en clase. Los investigadores observaron cuál grupo tendía a estresarse menos.

¿Qué tipo de estudio es?

a) Observacional

b) Experimental

Justificación: _____

Actividad de aprendizaje 12.7

Responde las siguientes preguntas.

1. ¿Cuáles son las diferencias entre los estudios observacionales y experimentales? _____
2. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de los estudios observacionales? _____
3. ¿Cuáles son las ventajas y las limitaciones de los estudios experimentales? _____

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 12. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el diseño de experimentos y estudios observacionales.			
Participé activamente con ideas para identificar ventajas y desventajas de estudios observacionales y diseño de experimentos.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas sobre estudios observacionales y diseño de experimentos.			
Comuniqué diferencias y similitudes entre el diseño de experimentos y un estudio observacional (MI-C4).			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 12 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el diseño de experimentos y estudios observacionales.			
Participó activamente con ideas para identificar ventajas y desventajas de estudios observacionales y diseño de experimentos.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas sobre estudios observacionales y diseño de experimentos.			
Comunicó diferencias y similitudes entre el diseño de experimentos y un estudio observacional (MI-C4).			

Nombre y firma de quien coevalúa

Las medidas estadísticas en el estudio de un fenómeno

Medidas de tendencia central:
Media Aritmética (\bar{x})
Mediana (Me)
Moda (Mo)

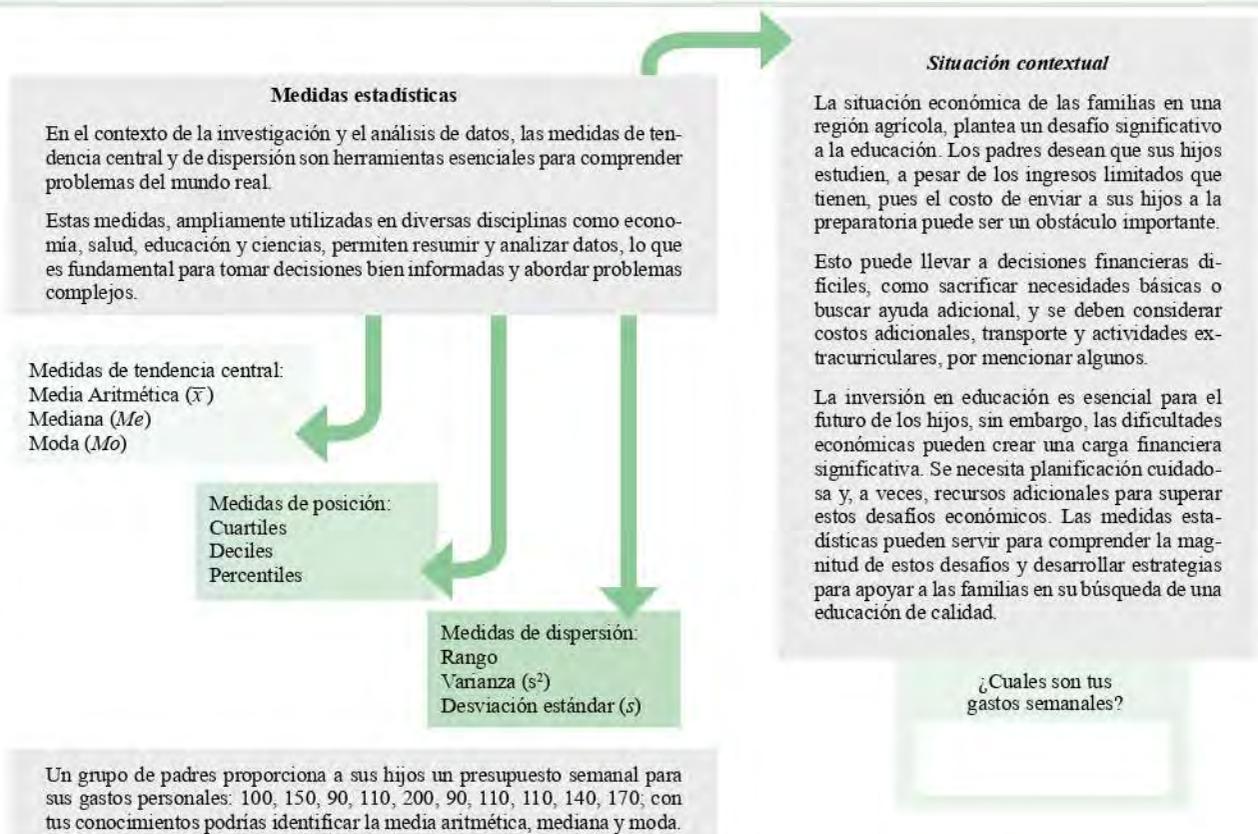
Medidas de posición:
Cuartiles
Deciles
Percentiles

Medidas de dispersión:
Rango
Varianza (s^2)
Desviación estándar (s)

Progresión de aprendizaje 13

Describe un fenómeno, problemática o situación de interés para el estudiantado utilizando las medidas de tendencia central (media, mediana y moda), y de dispersión (desviación estándar, varianza, rango intercuartil, etc.) adecuadas al contexto y valora qué tipo de conclusiones se puede extraer a partir de dicha información.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	A			
	C			
	H			
M3-C3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del Pensamiento Matemático, de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno.	A			
	C			
	H			



13.1. Medidas de tendencia central

Las medidas de tendencia central, son estadísticas descriptivas que, se utilizan para describir el centro de la distribución de una población o una muestra. También ayuda a resumir la información de manera que sea más fácil de interpretar y comparar. Y dependiendo de la naturaleza de los datos y del contexto, una medida de tendencia central, puede ser más apropiada que otra, para representar un conjunto de datos.



Media aritmética (\bar{x}). Se calcula sumando todas las observaciones obtenidas y dividiendo dicha suma entre el número total de elementos involucrados.

Mediana (Me). Una vez ordenados los datos de forma ascendente, si el conjunto de datos tiene un número impar de valores, la mediana es simplemente el valor central y si el conjunto de datos tiene un número par de valores, la mediana es el promedio de los dos valores centrales.

Moda (Mo). Es especialmente útil, cuando se trata de datos categóricos o discretos, pues indica la opción más popular o frecuente.

Actividad de aprendizaje 13.1

Identifica el concepto de media aritmética, mediana y moda.

1. ¿Consideras importante continuar con tus estudios? _____ ¿por qué? _____

2. La cantidad que recibes de tus padres, ¿es suficiente para cubrir tus gastos diarios? _____

3. Escribe la cantidad que recibes cada día de tus padres para los gastos de lunes a viernes _____

4. ¿Qué es la moda? _____

5. ¿Qué es la media aritmética o promedio? _____

6. Determina el promedio de dinero que recibes durante la semana. _____
7. Calcula la mediana del dinero que recibes a la semana. _____

Fórmulas que se utilizan para calcular las medidas de tendencia central.

Tipo de datos	Media Aritmética	Mediana	Moda
Datos simples	$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$	Identifica la posición de la mediana con $\frac{n+1}{2}$ y después, localiza la mediana.	Es el dato que más se repite de un conjunto de datos.
Datos ordenados simples	$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$	Identifica la posición de la mediana con $\frac{\sum f + 1}{2}$ y después localiza la mediana.	Es el dato que más se repite de un conjunto de datos.
Datos ordenados agrupados	$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$	$Me = L_I + \left(\frac{\frac{n}{2} - f_{aA}}{f_c} \right) i$ <p>L_I es el límite real inferior de la clase mediana (la clase que contiene a la mediana). n es el número total de datos (suma de frecuencias). f_{aA} es la frecuencia acumulada de la clase que precede (antes) a la clase mediana. f_c es la frecuencia de la clase mediana. i es el tamaño del intervalo de la clase mediana.</p>	$Mo = L_I + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) i$ <p>L_I es el límite real inferior de la clase modal. d_1 es la diferencia entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase precedente. d_2 es la diferencia entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase siguiente. i es el tamaño del intervalo de la clase modal.</p>

Ejemplo 13.1

Cálculo de las medidas de tendencia central para datos simples.

Los gastos relacionados con la educación de los hijos pueden incluir inscripción, libros de texto, uniformes, transporte, almuerzos escolares y otros gastos relacionados con la vida estudiantil, por ejemplo, el costo semanal de la asistencia de los hijos a la preparatoria para un grupo de padres es: 100, 150, 90, 110, 200, 90, 110, 110, 140, 170.

Cálculo de la media aritmética (\bar{x}). Permite conocer el promedio del costo semanal.

$$\bar{x} = \frac{100 + 150 + 90 + 110 + 200 + 90 + 110 + 110 + 140 + 170}{10} = \frac{1270}{10} = 127$$

La media indica que, en promedio, para este grupo de padres, el costo semanal de enviar a su hijo a la preparatoria es de \$127.00.

Cálculo de la mediana (Me). Ordena los datos, después, determina la posición de la mediana y, por último, identifica la mediana.

Datos ordenados de menor a mayor: 90, 90, 100, 110, 110, 110, 140, 150, 170, 200.

$$\text{Posición de la mediana (PM)} = \frac{n+1}{2} = \frac{10+1}{2} = 5.5$$

El número de datos, $n = 10$ es par, por lo que, la mediana se localiza entre las cantidades 110 y 110.

$$Me = \frac{110 + 110}{2}$$

La mediana sugiere que la mitad de las familias gastan \$110.00 por semana.

Cálculo de la moda (Mo). Es el valor que aparece con mayor frecuencia en el conjunto de datos. En los datos, 90, 90, 100, 110, 110, 110, 140, 150, 170, 200, el valor 110 es el que más se repite, por lo que $Mo = 110$. La moda indica que, el costo semanal más frecuente es \$110.00.

La gráfica de puntos con las medidas de tendencia central del costo semanal es:

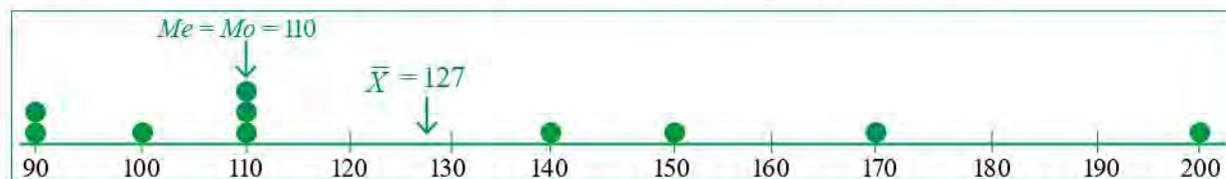


Figura 13.1. Gráfico de puntos.

Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

Ahora, compara los resultados obtenidos, con los de la Actividad de aprendizaje 13.1.

¿Qué medida es la mejor representante de cada conjunto de datos? _____

¿Por qué? _____

Ejemplo 13.2

Cálculo de las medidas de tendencia central para datos organizados en tablas de frecuencias simples y de datos agrupados en intervalos.

Tabla de frecuencias de datos simples	
Costo semanal (x)	Frecuencia (f)
90	2
100	1
110	3
140	1
150	1
170	1
200	1

Media aritmética

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{1270}{10} = 127$$

Mediana

$$PM = \frac{\sum f + 1}{2} = \frac{10 + 1}{2} = 5.5$$

$$Me = \frac{110 + 110}{2} = 110$$

Moda

$$Mo = 110$$

Tabla de frecuencias de datos agrupados en intervalos			
Costo semanal (x)	x	Frecuencia (f)	Frecuencia absoluta acumulada
[90, 118)	104	6	6
[118, 146)	132	1	7
[146, 174)	160	2	9
[174, 202)	188	1	10

Media aritmética

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{1264}{10} = 126.4$$

Mediana

$$Me = L_I + \left(\frac{\frac{n}{2} - f_{at}}{f_c} \right) i$$

$L_I = 90, \quad n = 10, \quad f_{at} = 0, \quad f_c = 6, \quad i = 28$

$$Me = 90 + \left(\frac{\frac{10}{2} - 0}{6} \right) (28) = 90 + \left(\frac{5}{6} \right) (28) \approx 113.3$$

Moda

$$Mo = L_I + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) i$$

$L_I = 90, \quad d_1 = 6, \quad d_2 = 5, \quad i = 28$

$$Mo = 90 + \left(\frac{6}{6 + 5} \right) (28) = 90 + \left(\frac{6}{11} \right) (28) \approx 105.3$$


Comprueba los resultados en: <https://calculadora-online.com/calculadoras-matematicas/>, o cualquier otra aplicación.

Actividad de aprendizaje 13.2

Cálculo de medidas de tendencia central para datos simples.

Puedes utilizar como herramienta de ayuda Excel, GeoGebra, <https://calculadorasonline.com/calculadoras-matematicas/>, etc.

1. Escribe las calificaciones obtenidas en las materias de tercero de secundaria. _____

2. Calcula las medidas de tendencia central.

Media aritmética (\bar{x})	Mediana (Me)	Moda (Mo)

3. ¿Qué representa la media aritmética obtenida? _____

4. ¿Qué representan la mediana y la moda? _____

5. ¿Qué relación puedes encontrar entre los resultados obtenidos de las medidas de tendencia central? _____

6. Como mejor representante de un conjunto de datos, ¿en qué situación se sugiere usar la mediana en vez de la media? _____

7. ¿En qué situaciones no tiene sentido usar la media ni la mediana? _____

13.2. Medidas de posición y de dispersión

Las medidas de posición son estadísticas que se utilizan para describir la posición relativa de un valor dentro de un conjunto de datos. Estas medidas ayudan a comprender dónde se encuentra un valor en relación con el resto de los datos. Los cinco números de resumen son: mínimo, primer cuartil (mediana), segundo cuartil, tercer cuartil y máximo. Además, se tiene el rango intercuartil ($RIC = Q_3 - Q_1$). Los cuartiles Q_1 , Q_2 , Q_3 , son valores que dividen a un conjunto de datos ordenados en cuatro partes iguales y, el cuartil Q_2 coincide con la mediana del conjunto de datos.

Las medidas de dispersión son esenciales para comprender la variabilidad en los datos, evaluar la consistencia de los resultados y tomar decisiones informadas en una amplia gama de disciplinas, desde la estadística hasta la investigación científica. Ayudan a estudiar la dispersión de un conjunto de datos, en el sentido de si están aglomerados o dispersos con respecto de la media, mediante la cuantificación de la dispersión. Por ejemplo, la varianza mide la dispersión de los datos, mientras que la desviación estándar mide cuánto se desvían los valores con respecto a la media. Una desviación estándar alta indica mayor dispersión de los datos, mientras que una desviación estándar baja indica menor dispersión.

Fórmulas para calcular las medidas de posición y de dispersión.

Medidas	Datos simples	Datos ordenados	
		Simples	Agrupados
Cuartiles. $Min, Q_1,$ $Q_2 = Me,$ $Q_3, Máx.$	Calcula la mediana de los datos, $Q_2 = Me$. Los datos quedan divididos en dos grupos, a estos se les calcula el cuartil Q_1 y Q_3 usando el mismo procedimiento para el cálculo de la mediana.	Localiza la posición del cuartil Q_k , que es $\frac{kn}{4}$. k es el cuartil que se busca. n es el número de datos. Se busca la posición del cuartil en la frecuencia absoluta acumulada y se identifica el dato que corresponde al cuartil.	$Q_k = L_I + \left(\frac{\frac{kn}{4} - f_{ad}}{f_c} \right) i$ Es casi la misma fórmula que para la mediana para datos agrupados. k es el cuartil que se busca. n es el número de datos.
Rango intercuartil	$RIC = Q_3 - Q_1$	$RIC = Q_3 - Q_1$	$RIC = Q_3 - Q_1$
Varianza	De una población $\sigma^2 = \frac{\sum(x - \mu)^2}{N}$ De una muestra $s^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n - 1}$ Método abreviado $s^2 = \frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}{n - 1}$	De una muestra $s^2 = \frac{\sum f(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$ Método abreviado $s^2 = \frac{\sum fx^2 - \frac{(\sum fx)^2}{n}}{n - 1}$	De una muestra $s^2 = \frac{\sum f(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$ Método abreviado $s^2 = \frac{\sum fx^2 - \frac{(\sum fx)^2}{n}}{n - 1}$
Desviación estándar	$s = \sqrt{\frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}{n - 1}}$	$s = \sqrt{\frac{\sum fx^2 - \frac{(\sum fx)^2}{n}}{n - 1}}$	$s = \sqrt{\frac{\sum fx^2 - \frac{(\sum fx)^2}{n}}{n - 1}}$

Ejemplo 13.3

Cálculo de las medidas de posición para datos simples.

El costo semanal de enviar a los hijos a la preparatoria: 100, 150, 90, 110, 200, 90, 110, 110, 140, 170.

Cálculo de las medidas de posición datos simples (cinco números de resumen).

Datos ordenados: 90, 90, 100, 110, 110, 110, 140, 150, 170, 200

$$Min = 90 \text{ y } Máx = 200$$

Para calcular los cuartiles, primero determina Q_2 el cual coincide con la mediana de los datos.

$$\text{Posición de la mediana } \frac{10 + 1}{2} = 5.5$$

90, 90, 100, 110, 110, 110, 140, 150, 170, 200

$$Me = Q_2 = \frac{110 + 110}{2}$$

El primer cuartil Q_1 lo determinas a partir del conjunto de datos que está a la izquierda de Q_2 , aplicando el procedimiento para determinar la mediana.

$$PM: \frac{5 + 1}{2} = 3$$

90 90 100 110 110

$$Q_1 = 100$$

El tercer cuartil Q_3 lo calculas a partir del conjunto de datos que está a la derecha de Q_2 , aplicando el procedimiento para determinar la mediana.

$$\text{PM: } \frac{5+1}{2} = 3$$

110 140 150 170 200

$Q_3 = 150$

El $Min = 90$, $Q_1 = 100$, $Q_2 = Me = 110$, $Q_3 = 150$ y $Máx = 200$.

El rango, $R = Máx - Min = 200 - 90 = 110$.

El rango intercuartil, $RIC = Q_3 - Q_1 = 50$.

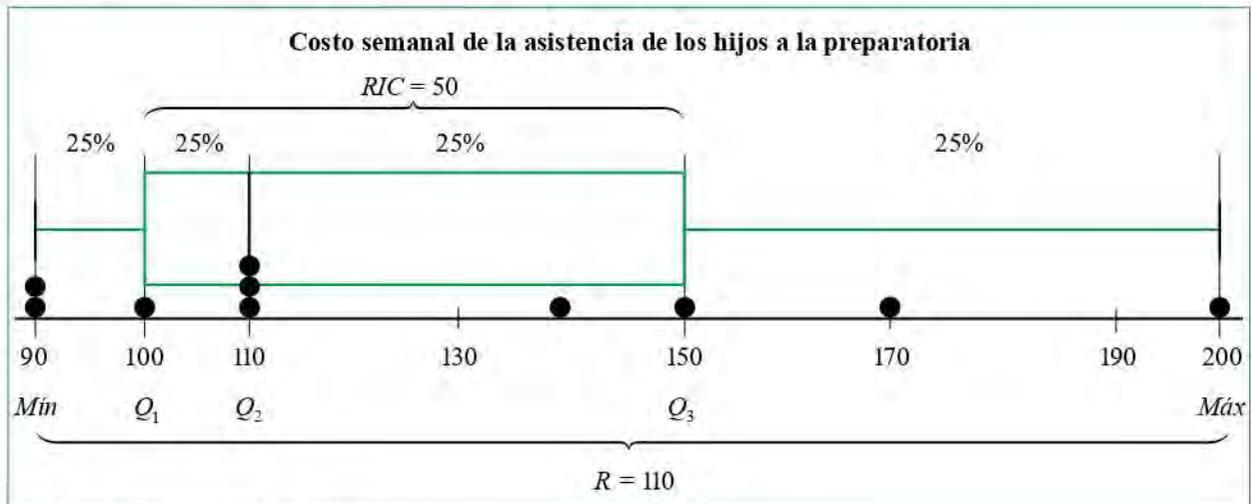


Figura 13.2. Diagrama de cajas.
Fuente: Elaboración propia (Excel s/f).

Cálculo de las medidas de dispersión datos simples

Cálculo de la varianza de los datos: 90, 90, 100, 110, 110, 140, 150, 170, 200.

$$s^2 = \frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}{n - 1}$$

$$s^2 = \frac{173500 - \frac{(1270)^2}{10}}{9}$$

$$s^2 = \frac{12210}{9}$$

$$s^2 \approx 1356.67$$

x	x^2
90	8100
90	8100
100	10000
110	12100
110	12100
140	19600
150	22500
170	28900
200	40000
Total	1270 173500

Cálculo de la desviación estándar para medir cuánto varía el costo semanal entre las familias.

$$s \approx \sqrt{1356.67} \approx 36.83$$

La desviación estándar del costo semanal de la asistencia de los hijos a la preparatoria con respecto a la media es de \$36.83 en promedio.

Ejemplo 13.4

Con los datos del Ejemplo 13.3 calcula las medidas de posición y de dispersión para datos organizados simples y organizados agrupados.

Datos organizados simples	Datos organizados agrupados
<p>Cálculo de los cuartiles</p> <p>Posición cuartil: $PQ_k = \frac{kn}{4}$ Valor del cuartil</p> <p>$PQ_1 = \frac{(1)(10)}{4} = 2.5$ $Q_1 = 100$</p> <p>$PQ_2 = \frac{(2)(10)}{4} = 5$ $Q_2 = 100$</p> <p>$PQ_3 = \frac{(3)(10)}{4} = 7.5$ $Q_3 = 100$</p> <p>Rango Rango intercuartílico</p> <p>$R = 110$ $RIC = 50$</p> <p>Cálculo de la varianza</p> $s^2 = \frac{\sum fx^2 - \frac{(\sum fx)^2}{n}}{n-1}$ $= \frac{173500 - \frac{(1270)^2}{10}}{10-1}$ $= \frac{173500 - 161290}{9}$ ≈ 1356.67	<p>Cálculo de los cuartiles</p> <p>Posición cuartil: $PQ_k = \frac{kn}{4}$ Valor del cuartil</p> <p>$PQ_1 = \frac{(1)(10)}{4} = 2.5$ $Q_1 \approx 101.67$</p> <p>$PQ_2 = \frac{(2)(10)}{4} = 5$ $Q_2 \approx 113.33$</p> <p>$PQ_3 = \frac{(3)(10)}{4} = 7.5$ $Q_3 \approx 167$</p> <p>Utiliza la fórmula: $Q_k = L_i + \left(\frac{\frac{kn}{4} - f_{ad}}{f_c} \right) i$</p> <p>$Q_1 = 90 + \left(\frac{2.5-0}{6} \right) (28) \approx 101.67$</p> <p>$Q_2 = 90 + \left(\frac{5-0}{6} \right) (28) \approx 113.33$</p> <p>$Q_3 = 146 + \left(\frac{7.5-6}{2} \right) (28) \approx 167$</p> <p>Rango Rango intercuartílico</p> <p>$R = 50$ $RIC = 65.33$</p> <p>Cálculo de la varianza</p> $s^2 = \frac{\sum f^2 - \frac{(\sum fx)^2}{n}}{n-1} = \frac{168864 - \frac{(1264)^2}{10}}{10-1}$ $= \frac{168864 - 159769.6}{9} \approx 1010.49$
<p>Cálculo de la desviación estándar</p> <p>$s^2 \approx \sqrt{1356.67} \approx 36.83$</p>	<p>Cálculo de la desviación estándar</p> <p>$s^2 \approx \sqrt{973.51} \approx 31.79$</p>

Actividad de aprendizaje 13.3

1. Analiza la dispersión en las siguientes gráficas.



Figura 13.3. Gráfico de barras.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023)..

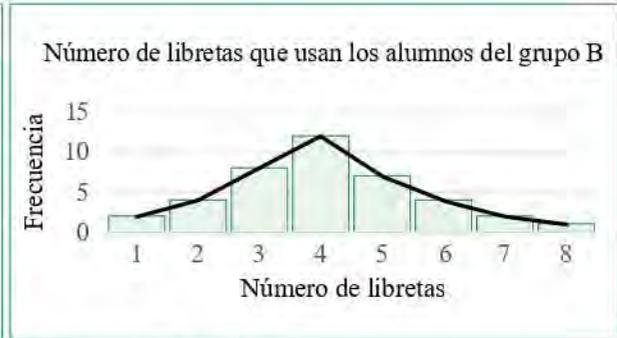


Figura 13.4. Gráfico de barras.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

2. ¿Cuál gráfica presenta mayor variabilidad? Explica tu respuesta. _____

Actividad de aprendizaje 13.4

Calcula medidas de posición y de dispersión.

1. Recaba las calificaciones de la última evaluación de Pensamiento Matemático I, de al menos 15 compañeros.

Datos: _____

2. Determina los números de posición:

Min = _____, Q_1 = _____, Q_2 = _____, Q_3 = _____, Máx = _____

3. Calcula la desviación estándar e interprétala, con base en el contexto de los datos. _____

4. ¿Qué relación hay entre el rango de los datos y el valor de la desviación estándar? _____

5. Según lo aprendido, ¿en qué otros aspectos de la vida cotidiana se pueden utilizar las medidas de tendencia central y de dispersión? _____

6. Proporciona una situación de la vida cotidiana en donde puedas implementar lo aprendido. _____

Actividad de aprendizaje 13.5.

Apóyate en la siguiente calculadora en línea¹ para resolver los ejercicios propuestos.

1. En una pequeña tienda de ropa, el dueño, Juan, se enfrentaba a un desafío. Quiere fijar los precios de sus camisetas de manera que sean atractivas tanto para sus clientes como para su rentabilidad. Decidió analizar el precio de las camisetas en su localidad para tomar una decisión informada. Estos son precios que Juan recopiló de diferentes negocios y que puede considerar para tomar decisiones sobre la fijación de precios en su tienda de ropa.

\$150, \$200, \$180, \$250, \$220, \$190, \$170, \$210, \$160, \$190

- a) Calcula el precio promedio de las camisetas en el siguiente espacio.

- b) Encuentra la moda de los precios y explica su importancia para la fijación de precios. _____

- c) ¿Cómo interpretarías la mediana en el contexto de la tienda de ropa? _____

- d) Calcula el percentil 25 (Q_1) y discute su relevancia para la estrategia de precios. _____

- e) ¿Qué información proporciona el percentil 75 (Q_3), y cómo podría influir en las decisiones de fijación de precios? _____

¹ <https://calculadorasonline.com/calculadoras-matematicas/>

f) ¿Por qué podría ser útil considerar diferentes estrategias de precios para distintos percentiles?

g) Calcula el rango de los precios de las camisetas y explora, ¿cómo podría ser utilizado para establecer precios mínimos y máximos?

h) Analiza la varianza y la desviación estándar, ¿cómo podrían estas medidas influir en la estabilidad de los precios de la tienda?

i) ¿Qué estrategias de fijación de precios podrías recomendar basándote en las medidas de tendencia central?

j) Considera la dispersión de precios, ¿cómo podrías sugerir a Juan que ajuste sus precios para mantener una gama atractiva pero consistente?

2. Se registra la temperatura en °C de los últimos 20 días: 32, 34, 35, 36, 37, 37, 36, 38, 30, 40, 41, 42, 42, 40, 39, 38, 37, 36, 34, 33, determina las medidas de tendencia central, de posición y de dispersión.

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: _____ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 13. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el cálculo de las medidas de tendencia central.			
Participé activamente con ideas para localizar las medidas de posición.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas sobre estudios observacionales y diseño de experimentos.			
Interpreté las medidas de tendencia (central, de dispersión y de posición) con base al contexto de los datos (M4-C2).			
Resolví situaciones contextualizadas aplicando las medidas de tendencia (M3-C3).			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 13 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el cálculo de las medidas de tendencia central.			
Participó activamente con ideas para localizar las medidas de posición.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas sobre estudios observacionales y diseño de experimentos.			
Interpretó las medidas de tendencia (central, de dispersión y de posición) con base al contexto de los datos (M4-C2).			
Resolvió situaciones contextualizadas aplicando las medidas de tendencia (M3-C3).			

Nombre y firma de quien coevalúa

La distribución normal

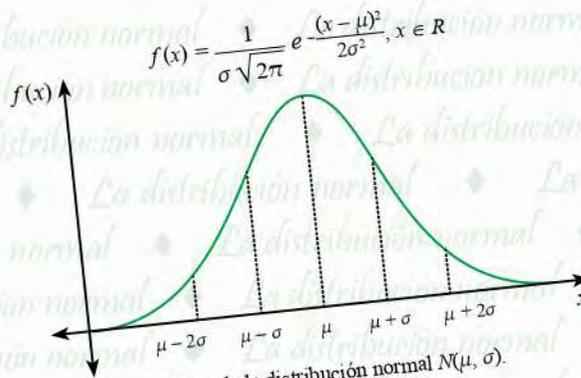


Figura 14.3. Curva de la distribución normal $M(\mu, \sigma)$.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).



Figura 14.1. Distribución normal de la estatura de estudiantes.
Fotografía: César Pilar Quintero (Google, 2023).

Progresión de aprendizaje 14

Explica un evento aleatorio cuyo comportamiento puede describirse a través del estudio de la distribución normal y calcula la probabilidad de que dicho evento suceda.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	A			
	C			
	H			
M3-C3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del Pensamiento Matemático, de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno.	A			
	C			
	H			

Responde las siguientes situaciones.

1. Relaciona el concepto con su definición y subraya la respuesta correcta.

Concepto	Definición
I. ¿Para qué se utilizan las medidas de tendencia central?	a) Se utilizan para medir qué tan alejados están los datos de las medidas de tendencia central.
II. ¿Para qué se utilizan las medidas de dispersión?	b) Medidas de tendencia central, medidas de dispersión y medidas de posición.
III. ¿Para qué se utilizan las medidas de posición?	c) Se utilizan para resumir un conjunto de datos.
IV. Tipos de medidas estadísticas.	d) Se utilizan para dividir al conjunto de datos en partes iguales.
A) Ia, IIb, IIIc, IVd	B) Ic, IIa, IIIId, IVb
C) Ic, IIa, IIIb, IVd	D) Ia, IIb, IIIId, IVc

Respuesta correcta: _____

Contesta según corresponda.

2. Define probabilidad: _____
3. La curva normal es simétrica alrededor de la media, con un área de 0.5000 en cada lado de la media.
 A) Verdadero B) Falso

Respuesta correcta: _____

14.1. La distribución de probabilidad normal

Los y las estudiantes de la Unidad Académica Preparatoria _____, realizaron medidas sobre la estatura de 170 estudiantes, dando como resultado la estatura media de 164.1 cm y la desviación estándar de 9.89 cm. Si las estaturas se distribuyen normalmente, ayuda a:

- Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar mida más de 175 cm.
- ¿Cuántos estudiantes esperas que midan más de 175 cm?

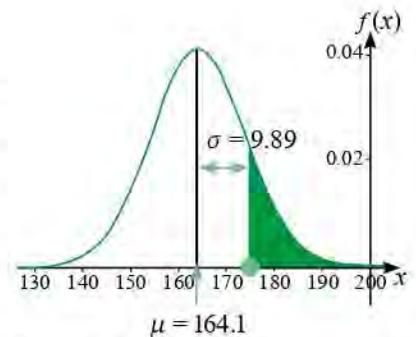


Figura 14.2. Gráfica distribución normal. Fuente: Elab. propia (GeoGebra, 2023).

Para dar respuesta a este tipo de situaciones es necesario que utilices una aplicación de la distribución de probabilidad normal (*Probability Distributions o Probability distributions*). La distribución de probabilidad normal se usa en la vida cotidiana para explicar eventos aleatorios, como en estadísticas en el análisis de datos en finanzas, en la modelación del comportamiento de variables aleatorias, en ingeniería para el diseño

QR 14.1. Aplicación de celular para calcular la probabilidad mediante la distribución de probabilidad normal.
Fuente: Parzibyte, 2023.



QR 14.2. Aplicación de celular para calcular la probabilidad mediante la distribución de probabilidad normal.
Fuente: Parzibyte, 2023.



de sistemas robustos, en psicología para el estudio del comportamiento humano, en medicina para evaluar y diagnosticar enfermedades basadas en valores de referencia, entre otros.

Distribución normal. Los parámetros de la distribución normal son la media μ y la desviación estándar σ . En este caso se dice que la variable aleatoria X tiene una distribución normal $N(\mu, \sigma)$ y se denota como $X \sim N(\mu, \sigma)$.

Es una distribución de probabilidad continua que se utiliza para modelar variables aleatorias en las cuales, los valores se agrupan alrededor de la media y se dispersan simétricamente. Tiene una forma de campana y está completamente definida por su media μ y desviación estándar σ . En el caso de que $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, se usa la variable Z para representar la variable aleatoria con una distribución normal estándar, es decir, $Z \sim N(0,1)$; la cual se usa para el cálculo de probabilidades determinando el área bajo la curva en un rango específico de valores. También se utiliza como referencia para comparar y analizar otras distribuciones normales.

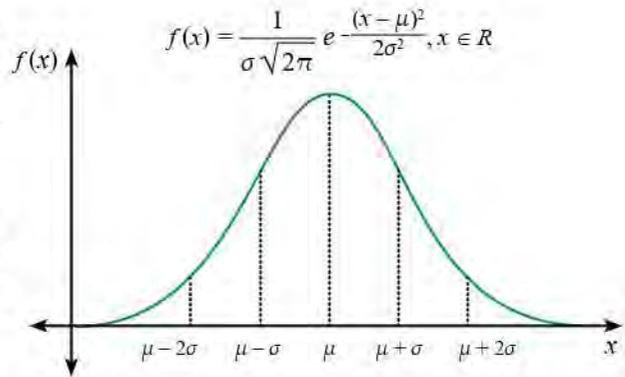


Figura 14.3. Curva de la distribución normal $N(\mu, \sigma)$.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

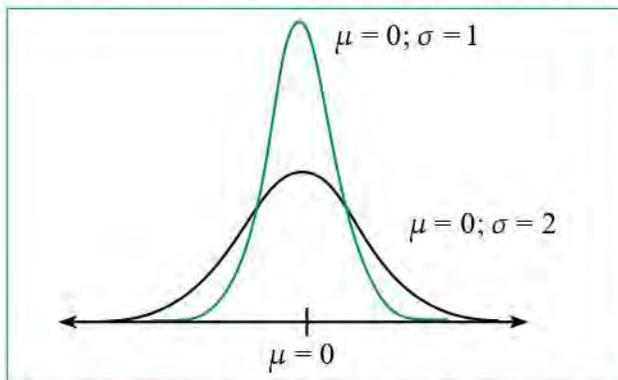


Figura 14.4. Curvas de la distribución normal con medias iguales y desviación estándar diferentes.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

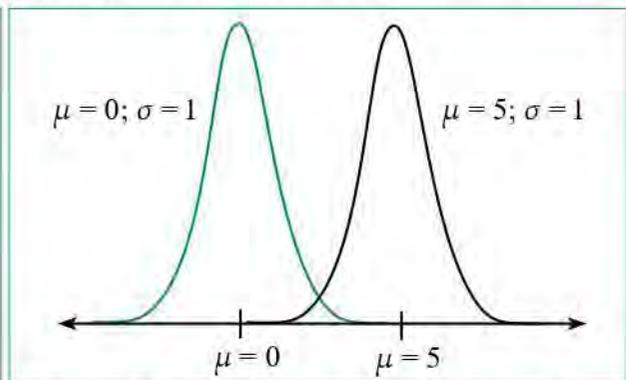


Figura 14.5. Curvas de la distribución normal con medias diferentes y desviación estándar iguales.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

14.2. Cálculo de probabilidades utilizando la curva normal estándar

La tabla del área bajo la curva de la distribución normal estándar se utiliza para calcular probabilidades de la variable Z asociada a la distribución normal estándar, $Z \sim N(0, 1)$. Mediante ella puedes determinar la probabilidad de que el valor z de una variable aleatoria Z , caiga dentro de un rango específico de valores, por ejemplo, $P(Z \leq z)$, $P(Z \geq z)$ o $P(-z \leq Z \leq z)$. Este cálculo se basa en las siguientes consideraciones:

1. Es importante entender que, en el cálculo de áreas bajo la curva de la distribución normal estándar no se trabaja con valores x , sino con valores z ; el acceso a la tabla es con valores z .
2. Debido a que la tabla estándar utiliza valores z debemos transformar los valores x en valores z . Esto se llama estandarizar los valores x . La estandarización se hace aplicando la fórmula:
 $x = \mu + z\sigma$.

$$\text{Despejando } z: z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- El área bajo toda la curva normal es igual a 1.
- En la Tabla 14.1 se enumeran todas las posibles áreas en los intervalos que empiezan en la media (localizada en $z = 0.0000$) y terminan en un valor específico de z .
- Las probabilidades (áreas) de otros intervalos, se calculan usando los elementos de la tabla y aplicando operaciones de suma y resta, según las propiedades de la curva normal.

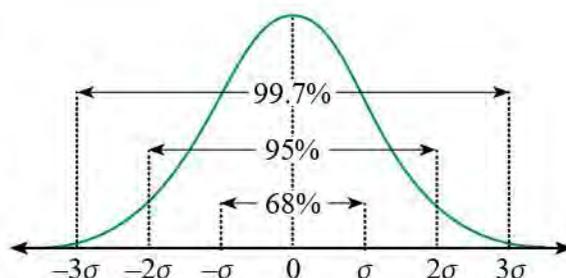


Figura 14.6 Regla empírica en la distribución normal.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

La regla empírica en la distribución normal como se muestra en la Figura 14.6, establece que aproximadamente el 68% de los datos se encuentran dentro de una desviación estándar alrededor de la media; el 95% se encuentra dentro de dos desviaciones estándar y el 99.7% se encuentra dentro de tres desviaciones estándar.

Tabla 14.1. Tabla de probabilidad $Z \sim N(0,1)$. Tabla del área bajo la curva normal estandarizada acumulada.

Z	0.0000	0.0100	0.0200	0.0300	0.0400	0.0500	0.0600	0.0700	0.0800	0.0900
-3	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483

-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
Z	0.0000	0.0100	0.0200	0.0300	0.0400	0.0500	0.0600	0.0700	0.0800	0.0900
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 14.1. Tabla de probabilidad $Z \sim N(0,1)$. Representa el área acumulada bajo la curva de la función de densidad normal estándar.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

14.3. Aplicaciones de la distribución normal

Los y las estudiantes de la Unidad Académica Preparatoria _____, realizaron medidas sobre la estatura de 170 estudiantes, dando como resultado la **estatura media de $\mu = 164.1$ cm** y la **desviación estándar de $\sigma = 9.89$ cm**. Si las estaturas se distribuyen normalmente, como podemos observar en la Figura 14.7, ello ayuda a:

- Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar mida más de 175 cm.
- ¿Cuántos estudiantes esperas que midan más de 175 cm?

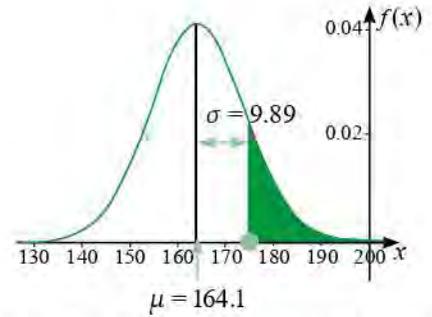


Figura 14.7. Distribución normal con media 164.1 cm y desviación estándar 9.89 cm. Fuente: Elaboración propia (GeoGebra 2023).

Actividad de aprendizaje 14.1

Calcula las probabilidades utilizando la distribución normal.

Calcula la probabilidad de que un estudiante elegido al azar mida más de 175 cm.

Resolución:

Para calcular la probabilidad tienes que calcular el área sombreada bajo la curva, usando la Tabla 14.1.

Por lo anterior, estandariza el valor de $x = 175$.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{175 - 164.1}{9.89} = \frac{10.9}{9.89} = 1.1021233670374115$$

Consulta la Tabla 14.1 y determina el área bajo la curva para $z = 1.1021233670374115$

Para este caso, la probabilidad de que un estudiante elegido al azar mida más de 175 cm, observando la Figura 14.7, es:

$$P(z > 1.1021233670374115) = 1 - 0.8643 = 0.1357 \text{ o } 13.57\%$$

Mediante la aplicación *Probability Distributions*, usando la variable aleatoria estandarizada $Z \sim N(0,1)$.

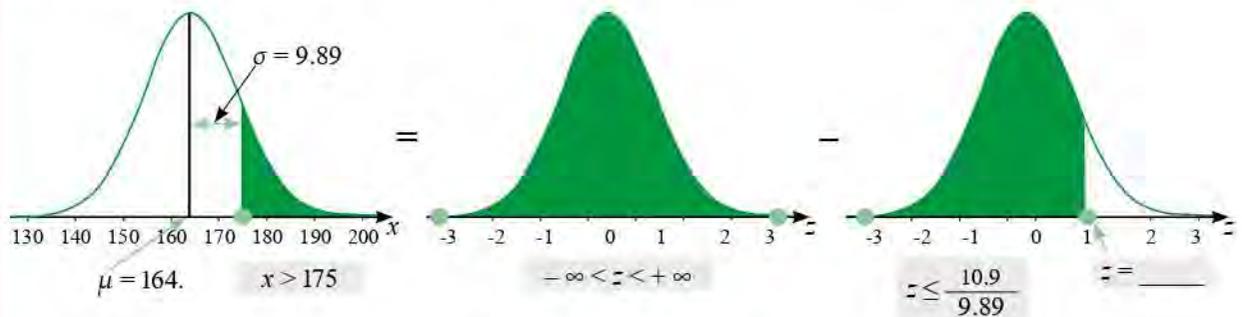


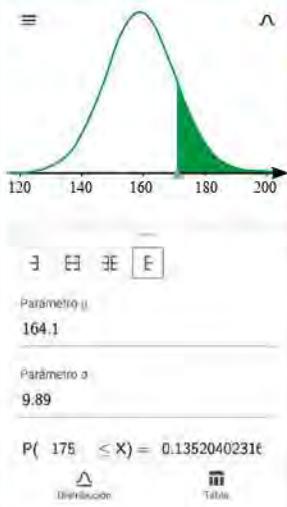
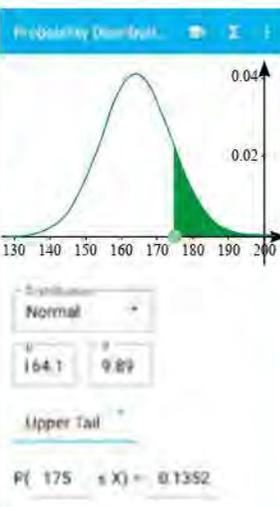
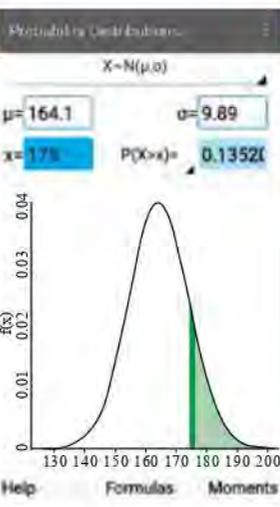
Figura 14.7. Probabilidad de que un estudiante elegido al azar mida más de 175 cm. Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2023).



Figura 14.8. Altura de una estudiante. Fotografía: César Pilar Quintero (Android, 2023).

Uso de la tecnología para el cálculo de probabilidades

Para resolver la situación que se presentó en la Actividad de aprendizaje 14.1 puedes usar las siguientes aplicaciones utilizando el celular.

GeoGebra	Probability Distributions	Probability Distributions	Distribución normal
			
<p>Figura 14.10. Aplicación GeoGebra. Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2023).</p>	<p>Figura 14.11. Aplicación Probability Distributions. Fuente: Elaboración propia (Probability Distributions, 2023).</p>	<p>Figura 14.12. Aplicación Probability Distributions. Fuente: Elaboración propia (Probability Distributions, 2023).</p>	<p>Figura 14.13. Aplicación Distribución normal. Fuente: Elaboración propia (Distribución normal, 2023).</p>

De acuerdo con las aplicaciones (*GeoGebra*, *Probability Distributions*, *Distribución normal*) la probabilidad de que un estudiante elegido al azar mida más de 175 centímetros es: **0.1352 o 13.52 %**.

Actividad de aprendizaje 14.2

Con apoyo del resultado obtenido en la Actividad de aprendizaje 14.1 determina lo siguiente, ¿cuántos estudiantes esperas que midan más de 175 cm?

Planteamiento

Total de estudiantes: _____

Probabilidad de que un estudiante elegido al azar mida más de 175 cm: _____

Tomando en cuenta la cantidad de estudiantes que se espera que midan más de 175 centímetros es; (_____) (_____) = _____ o _____ estudiantes.

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Autoevaluación para el aprendizaje. Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 14. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el estudio de elementos y propiedades de la distribución normal.			
Participé activamente con ideas para estandarizar valores z .			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas sobre el cálculo de probabilidades.			
Interpreté el valor de probabilidad con base al contexto de los datos (M4-C2).			
Apliqué el cálculo de probabilidades a eventos aleatorios con distribución normal (M3-C3).			

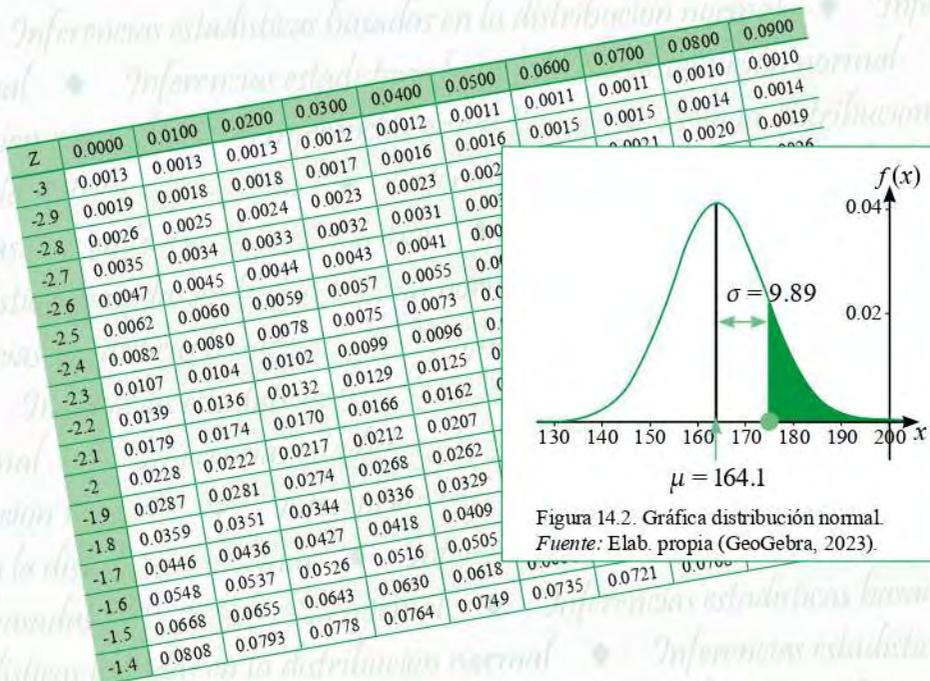
Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 14 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el estudio de elementos y propiedades de la distribución normal.			
Participó activamente con ideas para estandarizar valores z .			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas sobre el cálculo de probabilidades.			
Interpretó el valor de probabilidad con base al contexto de los datos (M4-C2).			
Aplicó el cálculo de probabilidades a eventos aleatorios con distribución normal (M3-C3).			

Nombre y firma de quien coevalúa

Inferencias estadísticas basadas en la distribución normal



Progresión de aprendizaje 15

Valora la posibilidad de hacer inferencias a partir de la revisión de algunas propiedades de distribuciones y del sentido de la estadística inferencial con la finalidad de modelar y entender algunos fenómenos.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la realización de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	A			
	C			
	H			
M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	A			
	C			
	H			
M4-C3 Construye y plantea posibles soluciones a problemas de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Activa los conocimientos previos respondiendo las siguientes situaciones; luego compara los resultados en plenaria.

1. Relaciona el concepto con su definición y subraya la respuesta correcta.

Concepto	Definición
I. ¿Qué es la estadística inferencial?	a) Es hacer generalizaciones precisas sobre una población a partir de una muestra de datos obtenidos de esa población.
II. ¿Cuál es el objetivo de la estadística inferencial?	b) Pruebas de hipótesis, Teorema de límite central.
III. Principales usos de la estadística inferencial	c) Es una rama de la estadística que se enfoca en hacer conclusiones y generalizaciones sobre una población a partir de la información obtenida de una muestra de la misma.
IV. Tipos de estadística inferencial	d) En investigación científica, en negocios, en salud, en política.

A) Ia, IIb, IIIc, IVd B) Ic, IIa, IIIb, IVd C) Ic, IIa, IIIb, IVd D) Ia, IIb, IIIc, IVc

2. Una curva normal es una curva en forma de campana con un área total bajo la curva igual a 1.
A) Verdadero B) Falso

Respuesta correcta: _____

3. La curva normal es _____ alrededor de la media, con un área de 0.5000 en cada lado de la media.

Respuesta correcta: _____

15.1. Uso de la inferencia estadística

César David y Raséc Mateo son dos jóvenes que cursan el primer semestre de bachillerato en la Unidad Académica Preparatoria La Cruz; ellos, además de estudiar son emprendedores, ya que cuentan con un terreno de ocho hectáreas donde tienen una plantación de árboles de manzana roja Delicia, manzana verde Granny Smith y otros árboles frutales de diversas temporadas.

La semana 15, de sus clases, coincide con el corte de manzana roja Delicia y ellos van a las fruterías de la comunidad a ofrecer su producto; sin embargo, los empresarios de las diversas fruterías le solicitaron lo siguiente: que la media aritmética de la población respecto al peso, en el caso de las manzanas rojas Delicia, debe estar en el **rango de 164 y 166** gramos por manzana. Si cumple con lo anterior le hacen una compra de 40 jabas.

César David le comenta a Raséc Mateo que para calcular la media aritmética de una población deben usar



Sabías que...

Estadística inferencial. Es una rama de la estadística que se enfoca en hacer conclusiones y generalizaciones sobre una población a partir de la información obtenida de una muestra de la misma (Triola, 2004).



¿Sabías que...?

Inferencia estadística. Es el conjunto de métodos estadísticos que permite incluir el comportamiento de una población por medio de la información proporcionada por una muestra (Triola, 2004).

inferencia estadística; le recuerda que el profesor que les imparte la Unidad de Aprendizaje Curricular Pensamiento Matemático I, comentó en clase sobre dos técnicas de inferencia estadística: *el teorema del límite central y la prueba de hipótesis*.

15.2. Teorema del límite central

El *teorema del límite central* lo vas a usar para estimar la media aritmética de la población (μ) por medio de varias muestras. En este caso, del lote de jabas de manzanas, selecciona una muestra aleatoria de 30 jabas y de cada caja seleccionada, toma aleatoriamente 15 manzanas rojas Delicia; luego, registra el peso de cada una y calcula el peso promedio de las manzanas por jaba. Con el peso promedio de las manzanas por jaba, forma un conjunto de datos, los cuales puedes usar para estimar la media aritmética de la población.

La selección de las 30 jabas se hace para garantizar por medio del *teorema del límite central*, es decir, que el conjunto de datos formados por las medias aritméticas tenga una **distribución normal**; es por ello, que se debe usar una cantidad grande de muestras, esta debe ser de cuando menos 30 muestras.



¿Sabías que...?

Cantidad grande de muestras es aquella que es mayor o igual que 30 (Triola, 2004).

Actividad de aprendizaje 15.1

Completa la siguiente tabla calculando la media aritmética de cada una de las muestras por jaba (peso promedio de las manzanas por jaba).

Para calcular la media aritmética de cada muestra, usa la siguiente fórmula:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Jaba	Peso en gramos por manzana															Media aritmética de la muestra
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	\bar{x}
1	168	165	166	165	164	168	167	163	164	168	168	167	166	162	166	165.8
2	164	167	166	167	165	164	165	166	168	166	168	165	167	168	166	
3	166	165	168	163	162	168	168	166	163	166	167	167	165	167	162	
4	163	165	166	163	164	163	164	165	166	165	162	165	167	164	167	
5	166	167	166	165	165	163	164	168	166	162	166	168	163	168	166	
6	163	163	162	162	164	165	166	167	167	166	165	162	166	167	166	
7	163	166	163	163	162	167	163	165	165	165	165	166	163	162	162	
8	162	163	163	163	163	166	162	164	166	168	165	164	165	167	164	
9	162	166	165	165	168	165	166	164	168	166	162	164	162	167	167	
10	162	164	163	165	162	164	163	164	162	164	166	163	168	162	165	163.8
11	168	165	165	167	166	163	166	163	162	168	168	166	162	166	168	
12	167	162	166	163	165	168	162	166	167	166	165	167	165	165	166	

13	164	165	162	163	168	167	165	162	167	163	165	165	162	168	166	
14	168	166	162	166	167	164	168	163	165	164	165	164	162	165	166	
15	162	167	168	165	163	163	162	166	164	163	168	163	162	166	168	
16	165	163	168	164	168	166	168	166	166	162	162	167	166	164	163	
17	164	163	167	167	164	162	166	165	168	166	166	167	167	167	163	
18	162	164	163	167	167	163	165	164	168	166	163	168	166	164	164	
19	164	166	164	166	164	167	167	168	164	163	165	167	166	167	167	
20	164	162	164	163	163	164	166	168	164	165	162	165	166	163	163	
21	168	165	167	167	168	164	164	165	167	166	165	168	163	165	167	
22	168	163	164	164	164	168	168	166	163	163	166	166	167	163	168	
23	167	167	165	162	166	165	165	165	168	165	165	168	165	166	165	
24	162	163	163	162	166	166	168	168	167	167	166	167	165	167	165	
25	163	167	165	164	166	165	163	167	165	165	163	162	164	167	167	
26	165	164	165	165	164	165	163	166	167	165	163	164	165	162	168	164.7
27	163	164	167	163	163	164	163	163	164	168	166	167	168	167	167	
28	162	166	167	164	165	166	163	167	164	163	165	166	164	168	168	
29	163	165	166	168	166	167	167	164	168	166	168	166	162	167	166	
30	163	164	167	167	163	163	167	166	162	166	166	162	166	162	168	

Actividad de aprendizaje 15.2

1. Completa la siguiente tabla con las medias aritméticas calculadas en la tabla de la Actividad de aprendizaje 15.1, y con ellas, estima la media aritmética de la población (μ)

Peso promedio en gramos de las 30 jabas de manzana roja delicia									
165.8									163.8
						164.7			

$$\mu = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \dots + \bar{x}_n}{n}$$

Nota que en este caso el número n se refiere ahora a las 30 jabas seleccionadas y de cada una de ellas, la media obtenida.

Se **infiere** que $\mu =$ ___ gramos por manzana. Ahora, si el rango de peso medio solicitado por los empresarios es de 164 – 166 gramos, entonces, César David y Raséc Mateo _____ podrán realizar la venta de las _____ jabas a los empresarios de las diversas fruterías de la comunidad, dado que _____ en el rango solicitado.

Actividad de aprendizaje 15.3

Inferencia estadística.

Las y los jóvenes estudiantes del grupo _____ en la Unidad Académica Preparatoria _____ tienen una plantación de manzanas verde Granny Smith; en su primer corte cosecharon 40 cajas, mismas que están a la venta, pero para lograrlo, las manzanas deben estar en un rango de peso de **184 – 186** gramos de acuerdo a su media aritmética poblacional. Realiza inferencia estadística para conocer si se puede hacer la venta.

Justifica tu respuesta:



Figura 15.1. Peso de una manzana.
Fotografía: César Pilar Quintero (Androi, 2023).

Nota: Para obtener el peso de cada manzana en las muestras aleatorias de cada jaba; debes visitar los lugares donde están a la venta y pesar cada una de las muestras. Te puedes apoyar en el siguiente archivo para obtener los resultados de los diversos cálculos; <https://qr.page/g/2H6eHB317a9>

QR 15.1. Archivo complementario para la Actividad de aprendizaje 15.3.
Fuente: Parzibyte, 2023.



15.3. Prueba de hipótesis

La prueba de hipótesis se emplea para examinar una afirmación mediante el análisis de datos extraídos de muestras buscando diferenciar entre resultados probablemente causados al azar y aquellos altamente improbables por pura casualidad. La ocurrencia de resultados altamente improbables podría ser explicada por la presencia de un evento poco común o la falsedad del supuesto en cuestión.

Por ejemplo, un profesor de Pensamiento Matemático I asevera que, mediante la implementación de su estrategia de enseñanza y aprendizaje, los docentes que la implementen se sorprenderán al ver que más del 70% del estudiantado obtendrá un nivel muy bueno en el logro de las metas de aprendizaje. Se realiza un experimento en 30 grupos, en los que docentes de Pensamiento Matemático I aplican dicha estrategia.

Un docente espera que alrededor de un 15% de cada grupo obtenga un nivel muy bueno. Ahora, considera que dicha estrategia no tiene efecto alguno. Basándote en el sentido común, ¿qué puedes

¿Sabías que...?

En estadística una **hipótesis** es una aseveración o afirmación acerca de una propiedad de una población (Triola, 2004).

¿Sabías que...?

La prueba de **hipótesis** es un procedimiento de inferencia estadística para probar una aseveración acerca de una población (Triola, 2004).

concluir acerca del supuesto de que la estrategia no tiene efecto alguno?, si en cada uno de los 30 grupos que se implementó:

- a) El 18% de los estudiantes obtuvo un nivel muy bueno en el logro de las metas de aprendizaje de Pensamiento Matemático I.

Conclusión. El resultado 18% es muy cercano al 15%, por lo que no debes concluir que dicha estrategia es eficaz; debido a que el resultado de 18% de nivel muy bueno puede ocurrir al azar, por lo tanto, no existe evidencia suficiente para afirmar que la estrategia implementada sea eficaz.

- b) El 72% de los estudiantes obtuvo un nivel muy bueno en el logro de las metas de aprendizaje de Pensamiento Matemático I.

Conclusión. Es muy poco probable que el 72% de cada grupo obtenga un nivel muy bueno. Esto lo puedes explicar de dos maneras: o se trata de un evento muy poco frecuente que ha ocurrido por azar, o en realidad la estrategia implementada es eficaz. Debido a la probabilidad extremadamente baja de que el 72% de cada grupo logre un nivel muy bueno sugiere que la estrategia es eficaz.

Mediante este ejemplo, se explica cómo es que debes concluir que la implementación de la estrategia es eficaz sólo si obtienes significativamente más estudiantes, con un nivel muy bueno, de los que un profesor espera normalmente por grupo.

En estadística, se utiliza la **prueba de hipótesis**, para comprobar la validez de una conjetura acerca de una población. A las conjeturas se le llaman hipótesis y la teoría de probabilidades suministra técnicas que permiten evaluar afirmaciones sobre una *población* basándose en datos muestrales. Para ello se consideran dos tipos de hipótesis:

- Hipótesis nula (H_0): Establece que el parámetro estudiado tiene un valor determinado o sigue una determinada distribución y se utiliza el símbolo de igualdad para expresar la hipótesis nula.
- Hipótesis alternativa (H_1): Afirma que el parámetro o la distribución son distintos a lo que asegura la hipótesis nula.

Teniendo en cuenta lo anterior, inicia con la aplicación de una prueba de hipótesis en el contexto de la Unidad Académica Preparatoria _____ en el ciclo escolar 2023-2024, donde se obtuvo la estatura media de la población estudiantil de **164.1** centímetros y con una desviación estándar de **9.89** centímetros. En el ciclo escolar actual el docente de Pensamiento Matemático I asegura que la estatura media de la población estudiantil (μ) es (**menor que, mayor que o diferente a**) _____ **160 centímetros**.

Ayuda al docente de Pensamiento Matemático I a realizar la inferencia estadística con una **prueba de hipótesis sobre la aseveración hecha**. Sigue los pasos siguientes:

Paso 1: Formula la hipótesis. En este punto se establecen dos hipótesis: la *hipótesis nula* (H_0) y la *hipótesis alternativa* (H_1). Si consideramos μ como la media aritmética de la población y x_0 como un valor fijo; la siguiente tabla muestra los tipos de hipótesis H_0 y H_1 . Si estás llevando a cabo una investigación y quieres utilizar una prueba de hipótesis **para respaldar tu afirmación, necesitas redactarla como la hipótesis alternativa**.



Hipótesis nula. Es la afirmación de que el valor de la media de la población es igual a un valor aseverado (Triola, 2004).



Hipótesis alternativa. Es la afirmación de que la media de la población tiene un valor que, de alguna manera, difiere de la hipótesis nula (Triola, 2004).

Hipótesis alternativa:

Caso 1	Caso 2	Caso 3
$H_0: \mu = x_0$	$H_0: \mu \geq x_0$	$H_0: \mu \leq x_0$
$H_1: \mu \neq x_0$	$H_1: \mu < x_0$	$H_1: \mu > x_0$

Actividad de aprendizaje 15.4

Selecciona un caso de la tabla anterior de acuerdo a la condición que describió el docente de Pensamiento Matemático I sobre la estatura de la población estudiantil en el ciclo escolar actual.

Caso: _____; hipótesis nula $H_0: \mu$ _____; hipótesis alternativa $H_1: \mu$ _____.

Paso 2: Selecciona un estadístico de prueba. Una vez formulada la hipótesis H_0 y H_1 , se selecciona un *estadístico de prueba* para los valores conocidos. En este caso, el estadístico de prueba a utilizar es el *estadístico z*. En la siguiente tabla se muestran estadísticos de prueba.



Estadístico de prueba. Es un valor que se calcula a partir de datos de una muestra y se utiliza en una prueba de hipótesis para medir el grado de concordancia entre una muestra de datos y la hipótesis nula (Triola, 2004).

Estadísticos de prueba (en una prueba de hipótesis de la media poblacional)		
Varianza conocida	Varianza desconocida, muestra grande (≥ 30)	Varianza desconocida, muestra chica (< 30)
$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$	$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$
\bar{x} es la media aritmética de la muestra. μ es la media aritmética de la población. σ es la desviación estándar de la población. n es el tamaño de la muestra.	\bar{x} es la media aritmética de la muestra. μ es la media aritmética de la población. s es la desviación estándar de la muestra como estimación de σ . n es el tamaño de la muestra.	\bar{x} es la media aritmética de la muestra. μ es la media aritmética de la población. s es la desviación estándar de la muestra como estimación de σ . n es el tamaño de la muestra.

Actividad de aprendizaje 15.5

Considera una cantidad grande de muestras (medir estaturas de estudiantes del ciclo escolar actual) y posteriormente, con apoyo de la tabla anterior selecciona el estadístico de prueba.

$\bar{x} =$ _____
 σ o $s =$ _____
 $n =$ _____

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$



Figura 15.2. Estatura de un estudiante.
Fotografía: César Pilar Quintero (Androi, 2023).

Paso 3: Calcula el estadístico de prueba y define el nivel de confianza para conocer el valor crítico.



Sabías que...

El estadístico z sirve para hacer comparaciones entre una muestra y una población (Triola, 2004).

Actividad de aprendizaje 15.6

Realiza el cálculo para conocer el valor del estadístico de prueba (en este caso z) retomando la información de la actividad anterior.

μ _____; \bar{x} _____; σ o $s =$ _____; $n =$ _____; $z =$ _____

Valor crítico valor crítico es un punto de la distribución del estadístico de prueba (en este caso z) que divide la curva de densidad en dos regiones: la aceptación de H_0 (que corresponde a todos los valores antes del valor crítico) y la región de rechazo de H_0 (que corresponde a todos los valores después).

El nivel de confianza en una prueba de hipótesis representa cuánto se confía en que los resultados de la prueba representen la población en general y se expresa como un porcentaje (por ejemplo, 95% o 99%) y el nivel de significación (que se denota como α) es la probabilidad máxima que se acepta de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera. Por ejemplo, si usamos un nivel de confianza del 95%, el nivel de significación correspondiente sería 0.05.

QR 15.2. Tabla de valores de probabilidad acumulada para la distribución normal estándar.
Fuente: Parzibyte, 2023.



En la siguiente tabla se enlistan los valores críticos con un nivel de confianza de 95% para los tipos de hipótesis. En este caso el **nivel de significación** es $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$. En el enlace <https://qr.page/g/lpH9SLwGwWN> o código QR puedes consultar la tabla de distribución (z).

Caso 1	Caso 2	Caso 3
$H_0: \mu = x_0$ $H_1: \mu \neq x_0$	$H_0: \mu \geq x_0$ $H_1: \mu < x_0$	$H_0: \mu \leq x_0$ $H_1: \mu > x_0$
Valor crítico para $\alpha = 0.05$	Valor crítico para $\alpha = 0.05$	Valor crítico para $\alpha = 0.05$
$-z_{\alpha/2} = -1.96$ y $z_{\alpha/2} = 1.96$	$-z_{\alpha} = -1.645$	$z_{\alpha} = 1.645$

Tabla de distribución normal Z							
z	0.06	z	0.04	0.05	z	0.04	0.05
-1.9	0.0250	-1.6	0.0505	0.0495	1.6	0.9495	0.9505
1.9	0.9750						

Actividad de aprendizaje 15.7

Selecciona el valor crítico, tomando en cuenta la estatura media de la población del ciclo escolar actual (μ) establecida por el docente de Pensamiento Matemático I al inicio de tema.

μ _____; valor crítico = _____

Paso 4: Aceptar o rechazar la hipótesis nula H_0 . En este apartado compara el **estadístico de prueba** z con el **valor crítico**, con el objetivo de determinar si la **hipótesis nula**, H_0 , se **acepta** o se **rechaza**.

- **Caso 1.** Se acepta H_0 si $-1.96 < z < 1.96$; en caso contrario, se rechaza H_0 y se acepta H_1 .
- **Caso 2.** Se acepta H_0 si $z > -1.645$; en caso contrario, se rechaza H_0 y se acepta H_1 .
- **Caso 3.** Se acepta H_0 si $z < 1.645$; en caso contrario, se rechaza H_0 y se acepta H_1 .

Actividad de aprendizaje 15.8

Acepta o rechaza la hipótesis nula según sea el caso, con apoyo de la Actividad de aprendizaje 15.6 retoma el resultado del *estadístico de prueba* z y de la Actividad de aprendizaje 15.7 retoma el valor crítico. Así mismo, interpreta el resultado.

1. H_0 : _____; valor crítico: _____; valor de $z =$ _____.
2. Selecciona según sea el caso: _____
3. Se acepta o rechaza la hipótesis nula $H_0: \mu$ _____

4. Interpretación del resultado:



Figura 15.3. Estatura de una estudiante.
Fotografía: César Pilar Quintero (Androi, 2023).

Actividad de aprendizaje 15.9

Resuelve la siguiente situación. En una Unidad Académica Preparatoria, en el ciclo escolar 2023-2024, se obtuvo el peso medio de la población estudiantil de 61.7 kilogramos y con una desviación estándar de 14.1 kilogramos.

1. En el ciclo escolar actual el docente de Pensamiento Matemático I asegura que el peso medio de la población estudiantil es (μ) _____ kilogramos.
2. Ayuda al docente de Pensamiento Matemático I a resolver la situación utilizando inferencia estadística con una *prueba de hipótesis*.

3. Interpretación del resultado:



Figura 15.4. Peso de una estudiante.
Fotografía: César Pilar Quintero (Androi, 2023).

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: _____ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 15. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el estudio de la prueba de hipótesis.			
Participé activamente con ideas para obtener el valor crítico z_{α} .			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas sobre el cálculo del estadístico de prueba z .			
Apliqué el Teorema del límite central para hacer inferencias sobre una población (M3-C1).			
Usé la prueba de hipótesis para validar o refutar afirmaciones sobre la media poblacional (M4-C2).			
Realicé pruebas de hipótesis en datos estadísticos para hacer inferencias sobre una población (M4-C3).			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 15 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el estudio de la prueba de hipótesis.			
Participó activamente con ideas para obtener el valor crítico z_{α} .			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas sobre el cálculo del estadístico de prueba z .			
Aplicó el Teorema del límite central para hacer inferencias sobre una población (M3-C1).			
Usó la prueba de hipótesis para validar o refutar afirmaciones sobre la media poblacional (M4-C2).			
Realizó pruebas de hipótesis en datos estadísticos para hacer inferencias sobre una población (M4-C3).			

Nombre y firma de quien coevalúa

Autoevaluación final para el aprendizaje

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: _____ Turno: _____

La presente autoevaluación debe servir para que valores tu labor durante el semestre. Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso de aprendizaje de la Unidad de Aprendizaje Curricular Pensamiento Matemático I, en cumplimiento de las metas de aprendizaje. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Mis desempeños	Puedo mejorar	Alcancé	Sobresaliente
Efectúo cálculo de probabilidades y de medidas de tendencia central (M1-C1).			
Valoro la selección adecuada del tipo de gráfico apropiado para representar datos y cuándo se utilizan las permutaciones o las combinaciones en el análisis de un evento (M2-C1).			
Empleo aplicaciones informáticas para el cálculo de permutaciones y combinaciones, así como para otros estadísticos de prueba de hipótesis (M3-C1).			
Reconozco que la organización de datos y su visualización gráfica contribuyen a tomar decisiones en relación con la incertidumbre y variabilidad, en la determinación entre los tipos de variables cualitativas y cuantitativas, así como para apreciar el efecto de datos atípicos (M1-C2).			
Identifico tendencias y comportamientos específicos de los datos correspondientes a determinados fenómenos o eventos a través de su representación en tablas y en gráficas estadísticas (M2-C2).			
Analizo la relación de independencia que puede haber entre dos variables categóricas, así como si existe correlación entre variables cualitativas (M3-C2).			
Utilizo diferentes propiedades y pruebas estadísticas para valorar relaciones entre variables o interpretar medidas de tendencia relacionadas con variadas situaciones o eventos. (M4-C2)			
Aprecio la diferencia entre eventos equiprobables y no equiprobables (M1-C3).			
Aplico las técnicas de conteo apropiadas, las medidas de tendencia y el cálculo de probabilidades para el análisis y solución de problemas relacionados con eventos diversos. (M3-C3)			
Realizo pruebas de hipótesis en datos estadísticos para hacer inferencias sobre una población (M4-C3).			
Explico la diferencia entre los casos posibles de ocurrencia de un suceso y el total de casos, así como las diferencias y similitudes entre el diseño de experimentos y un estudio observacional (M1-C4).			
Comparto mis propuestas sobre el diseño de cuestionarios para recolectar información de una situación de interés (M2-C4).			

Coevaluación final para el aprendizaje

Solicita a un compañero de equipo que valore tu labor durante el semestre y que seleccione en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso de aprendizaje de la Unidad de Aprendizaje Curricular Pensamiento Matemático I, en cumplimiento de las metas de aprendizaje. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeños de mi compañero	Puede mejorar	Alcanzó	Sobresaliente
Efectúa cálculo de probabilidades y de medidas de tendencia central (M1-C1).			
Valora la selección adecuada del tipo de gráfico apropiado para representar datos y cuándo ha sido necesario utilizar las permutaciones o las combinaciones en el análisis de un evento (M2-C1).			
Emplea aplicaciones informáticas para el cálculo de permutaciones y combinaciones, así como para otros estadísticos de prueba de hipótesis (M3-C1).			
Reconoce que la organización de datos y su visualización gráfica contribuyen a tomar decisiones en relación con la incertidumbre y variabilidad, en la determinación entre los tipos de variables cualitativas y cuantitativas, así como para apreciar el efecto de datos atípicos (M1-C2).			
Identifica tendencias y comportamientos específicos de los datos correspondientes a determinados fenómenos o eventos a través de su representación en tablas y en gráficas estadísticas (M2-C2).			
Analiza la relación de independencia que puede haber entre dos variables categóricas, así como si existe correlación entre variables cualitativas (M3-C2).			
Utiliza diferentes propiedades y pruebas estadísticas para valorar relaciones entre variables o interpretar medidas de tendencia relacionadas con variadas situaciones o eventos. (M4-C2)			
Aprecia la diferencia entre eventos equiprobables y no equiprobables (M1-C3).			
Aplica las técnicas de conteo apropiadas, las medidas de tendencia y el cálculo de probabilidades para el análisis y solución de problemas relacionados con eventos diversos. (M3-C3)			
Realiza pruebas de hipótesis en datos estadísticos para hacer inferencias sobre una población (M4-C3).			
Explica la diferencia entre los casos posibles de ocurrencia de un suceso y el total de casos, así como las diferencias y similitudes entre el diseño de experimentos y un estudio observacional (M1-C4).			
Comparte sus propuestas sobre el diseño de cuestionarios para recolectar información de una situación de interés (M2-C4).			

Nombre y firma de quien coevalúa.

Bibliografía consultada

Bibliografía de consulta para el estudiante y el profesor

- Juárez, J. D. et al. (2023). Estadística. Exploración de datos. Once Ríos.
- Juárez, J. D. et al. (2023). Probabilidad. Once Ríos.
- SEP (2023a). Acuerdo número 09/08/23 por el que se establece y regula el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior. Diario Oficial de la Federación.
- SEP (2023b). Orientaciones Pedagógicas del recurso sociocognitivo pensamiento matemático. SEMS.
- SEP (2023c). Progresiones de aprendizaje del recurso sociocognitivo pensamiento matemático. SEMS.
- SEP (2023d). Programa de estudios del Recurso Sociocognitivo Pensamiento Matemático I. Secretaría de Educación Pública.
- Triola, M. F. (2004). Estadística (9a ed.). Pearson Educación.
- Escalante, L. (2023). Pensamiento matemático I. Book Mart.
- Colavita, E. (2023). Pensamiento matemático I. Macmillan Education.

Referencia a las fuentes de consulta de tablas

- Tabla 2.1. Casos confirmados de dengue correspondiente a la semana epidemiológica de los años 2022 y 2023.
Fuente: <http://saludsinaloa.gob.mx/wp-content/uploads/2017/epidemiologia/tercer-trimestre-2023/Boletin%20Semanal%20Convencional%20Sinaloa%202023-SEM%2039.pdf>
- Tabla 2.2. Promedio ofensivo durante cuatro temporadas de Yasmany Tomás. Fuente: https://www.espn.com.mx/beisbol/mlb/jugador/estadisticas/_id/33662/yasmany-tomas
- Tabla 6.1. Gasto corriente monetario promedio trimestral del año 2022 por hogar en Sinaloa, según grandes rubros del gasto en pesos.
Fuente: Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares (ENIGH) 2022. Nueva Serie. Disponible en: <https://www.inegi.org.mx/programas/enigh/nc/2022/>
- Tabla 6.2. Gasto corriente monetario promedio trimestral en los veinte principales rubros de gasto del año 2022 por hogar en Sinaloa, según grandes rubros del gasto en pesos.
Fuente: Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares (ENIGH) 2022. Nueva Serie. Disponible en: <https://www.inegi.org.mx/programas/enigh/nc/2022/>
- Tabla 7.1. Frecuencia de juegos de beisbol jugados en la LMP, temporada 2023. Fuente: <https://www.inegi.org.mx/programas/enigh/nc/2022/>
- Tabla 7.2. Cuentas de Instagram con más seguidores en 2022-2023. Fuentes: Elaboración propia, con base en <https://www.ayudacuentas.com/instagram/cuentas-con-mas-seguidores/> y <https://www.merca20.com/los-mas-seguidos-instagram-2022/> (Word, 2023).
- Tabla 7.3. Carreras con más demandada en la UNAM 2022-2023 y 2023-2024. Fuentes: Elaboración propia, con base en <https://blog.unitips.mx/carreras-mas-demandadas-de-la-unam> y <https://oferta.unam.mx> (Word, 2023).
- Tabla 7.4. Distribución de frecuencias agrupadas de golea a favor en la Liga MX temporada 2022-2023. Fuente: Elaboración propia (Word, 2023).
- Tabla 7.5. Distribución de frecuencias agrupadas con marcas de clase. Fuente: Elaboración propia (Word, 2023).
- Tabla 8.1. Preferencia del consumo de refrescos por género. Fuente: Elaboración propia (Word, 2023).
- Tabla 8.2. Frecuencia esperada del consumo de refrescos por género. Fuente: Elaboración propia (Word, 2023).
- Tabla 8.3. Tabla de distribución de la Chi-cuadrado. Fuente: <https://www.disfrutalasmaticas.com/datos/tabla-chi-cuadrado.html>
- Tabla 9.1. Datos de la calificación obtenida en Matemáticas y Mecánica. Fuente: Elaborada en Word.
- Tabla 10.1. Solicitud y admisión por género de la Universidad de California, en Berkeley, 1973. Fuente: Elaboración propia, con base en https://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja_de_Simpson (Word, 2023).
- Tabla 10.2. Solicitud y admisión a los departamentos por género, de la Universidad de California, en Berkeley, 1973. Fuente: Elaboración propia, con base en https://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja_de_Simpson (Word, 2023).

Tabla.10.3. Medallero de los Juegos Olímpicos de Tokyo 2020. Fuente: <https://www.bbc.com/mundo/deportes-57970068>

Tabla 14.1. Tabla de probabilidad $Z \sim N(0,1)$. Representa el área acumulada bajo de la curva de la función de densidad normal estándar. Fuente: Elabora en Excel.

Referencia a las fuentes de consulta de imágenes

Figura 1.1. Datos de la temperatura de una tarde en Culiacán. Fuente: Aplicación del clima (Androide, 2023). Disponible en <https://weather.com/es-US/tiempo/horario/l/2e0aa94c3d3693b7de58529f70c0b6475cc7eeb2f8b85964396409e21c0efa96>

Figura 1.2. Aviso de suspensión y reanudación de clases en la UAS por recomendación de Protección Civil. Fuente: Universidad Autónoma de Sinaloa.

Figura 1.3. Datos históricos de temperatura en Culiacán en 2021. Fuente: Elaboración propia para uso educativo, con base en <https://es.weatherspark.com/h/y/3157/2023/Datos-hist%C3%B3ricos-meteorol%C3%B3gicos-de-2023-en-Culiac%C3%A1n-M%C3%A9xico#Figures-Temperature>

Figura 1.4. Datos históricos de temperatura en Culiacán en 2022. Fuente: Elaboración propia para uso educativo, con base en <https://es.weatherspark.com/h/y/3157/2023/Datos-hist%C3%B3ricos-meteorol%C3%B3gicos-de-2023-en-Culiac%C3%A1n-M%C3%A9xico#Figures-Temperature>

Figura 1.5. Datos históricos de temperatura en Culiacán en 2023. Fuente: Elaboración propia para uso educativo, con base en <https://es.weatherspark.com/h/y/3157/2023/Datos-hist%C3%B3ricos-meteorol%C3%B3gicos-de-2023-en-Culiac%C3%A1n-M%C3%A9xico#Figures-Temperature>

Figura 1.6. Rutas sugeridas por Google Maps, de Little Caesars® a Waldo's®. Fuente: Aplicación Google Maps (2023). Disponible en: <https://www.google.com.mx/maps/preview>

Figura 2.1. La temperatura media mundial. Fuente: Elaboración propia, con base en, El Mundo. Disponible en: <https://www.elmundo.es/ciencia-y-salud/medio-ambiente/2023/05/17/6464aac3fdddf5c698b45c7.html>

Figura 2.2. Máquina de las bolas utilizada como una representación visual de la distribución de probabilidad en eventos aleatorios. Fuente: PhET. Disponible en: <https://phet.colorado.edu/en/simulations/plinko-probability>

Figura 2.3. Simulador de Tablero Galton para hacer lanzamiento de diversas cantidades de pelotas. Fuente: PhET. Disponible en: <https://phet.colorado.edu/en/simulations/plinko-3probability>

Figura 2.4. Simulador de un laboratorio como ambiente de aprendizaje para conocer la probabilidad frecuencial de eventos. Fuente: PhET. Disponible en: <https://phet.colorado.edu/en/simulations/plinko-probability>

Figura 2.5. Experimento utilizado para analizar y predecir los resultados del juego. Fuente: PhET. Disponible en: <https://phet.colorado.edu/en/simulations/plinko-probability>

Figura 3.1. Applet en GeoGebra para simular el lanzamiento de dos dados n veces. Fuente: GeoGebra. Disponible en: <https://www.geogebra.org/m/PCpeDJQF>

Figura 5.1. Diagrama de Venn. Fuente: Elaboración propia (Word, 2023).

Figura 5.2. Diagrama de Venn. Fuente: Elaboración propia (Word, 2023).

Figura 5.3. Diagrama de Venn. Fuente: Elaboración propia (Word, 2023).

Figura 5.4. Lanzamiento de una moneda. Fuente: Rolando Forneiro Rodríguez (Androide, 2023).

Figura 5.5. Diagrama de Venn. Fuente: Elaboración propia (Word, 2023).

Figura 5.6. Lanzamiento de dos dados. Fuente: SEOR 2023.

Figura 6.1. Hoja de cálculo de Google. Fuente: <https://docs.google.com/spreadsheets/>

Figura 7.1. Resultados de juegos ganados y juegos perdidos de la LMP 2022-2023. Fuente: Elaboración propia, con base en: https://es.wikipedia.org/wiki/Liga_Mexicana_del_Pac%C3%ADfico_2022-23 (Excel, 2023).

Figura 7.2. Rendimiento de la temporada 2022-2023 en la LMP. Fuente: Elaboración propia, con base en: https://es.wikipedia.org/wiki/Liga_Mexicana_del_Pac%C3%ADfico_2022-23 (Excel, 2023).

Figura 7.3. Tipos de gráficos. Fuente: Elaboración propia (Word 2023).

Figura 7.4. Gráfica de barra simple. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

Figura 7.5. Gráfica de barra doble. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

Figura 7.6. Cuentas de Instagram con más seguidores en 2023. Fuente: Elaboración propia, con base en: <https://www.ayudacuentas.com/instagram/cuentas-con-mas-seguidores/> (Excel, 2023).

- Figura 7.7. Cuentas de Instagram con más seguidores en 2022 y 2023. Fuentes: Elaboración propia, con base en: <https://www.ayudacuentas.com/instagram/cuentas-con-mas-seguidores/> y <https://www.merca20.com/los-mas-seguidos-instagram-2022/> (Excel, 2023).
- Figura 7.8. Carreras más demandadas UNAM 2023-2024. Fuente: Elaboración propia, con base en: <https://blog.uniptips.mx/carreras-mas-demandadas-de-la-unam> (Excel, 2023).
- Figura 7.9. Goles a favor. Fuente: Elaboración propia, con base en: <https://www.mediotiempo.com/futbol/liga-mx/tabla-general/385-2022> (Excel, 2023).
- Figura 7.10. Histograma de goles a favor en la Liga MX temporada 2022-2023. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 7.11. Proceso de construcción de un polígono de frecuencias a partir del histograma. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 7.12. Ventas. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 7.13. Temperatura en °C. Fuente: Elaborada en Excel (Excel, 2023).
- Figura 7.14. Pares de zapatos. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 7.15. Televisores por hogar. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 7.16. Tiempo destinado al día para ver videos de TikTok por estudiantes del grupo A. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 7.17. Tiempo destinado al día para ver videos de TikTok por estudiantes del grupo C. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 7.18. Peso de 20 estudiantes. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 7.19. Tiempo invertido en plataformas y dispositivos digitales. Fuente: Elaborada en Excel.
- Figura 7.20. Resultados de JG y JP de la LMO 2022-2023. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 7.21. Impacto de Spotify en la industria de la música. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 8.1. Tabla de contingencia en la calculadora digital de statologos, para realizar la prueba Chi-cuadrado. Fuente: <https://statologos.com/calculadora-prueba-de-independencia-chi-cuadrado/>
- Figura 9.1a. Gráfica de la ecuación $y = mx + b$. Fuente: Elaboración propia (Desmos 2023).
- Figura 9.1b. Gráfica de la ecuación $y = mx + b$. Fuente: Elaboración propia (Desmos 2023).
- Figura 9.2. Gráfico de dispersión entre la calificación obtenida en Matemáticas y Mecánica. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 9.3. Correlación directa o positiva. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 9.4. Correlación inversa o negativa. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 9.5. Correlación nula. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 9.6. Fuerza de correlación fuerte. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 9.7. Fuerza de correlación débil. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 9.8. Fuerza de correlación nula. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 9.9. Gráfico de dispersión. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 9.10. Gráfico de dispersión. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 9.11. Gráfico de dispersión. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 9.12. Gráfico de dispersión. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 9.13. Gráfico de dispersión. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 9.14. Gráfico de dispersión. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 9.15. Datos de horas de estudio y de calificación. Fuente: <https://docs.google.com/spreadsheets/>
- Figura 9.16. Cálculo del coeficiente de correlación. Fuente: <https://docs.google.com/spreadsheets/>
- Figura 9.17. Función para calcular el coeficiente de correlación. Fuente: <https://docs.google.com/spreadsheets/>
- Figura 10.1. Comportamiento de un conjunto de datos. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 10.2. Número de veces que una madre/padre de familia recuerda a un adolescente que haga su tarea. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 10.3. Gráficos de dispersión que ejemplifican la Paradoja de Simpson. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).
- Figura 10.4. Gráficos de dispersión que ejemplifican la Paradoja de Simpson. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

Figura 10.5. Frecuencia de las solicitudes en cada departamento por género. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

Figura 10.6. Porcentaje de las admisiones en cada departamento por género. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

Figura 11.1. Población y muestra. Fuente: Fotografía: Asia Cecilia Carrasco Valenzuela e Iliana Tirado Olivas (Google, 2023).

Figura 11.2. Tipos de muestreo. Fuente: Elaboración propia (Word, 2023).

Figura 11.3. Aplicación para calcular tamaño de una muestra. Fuente: EST calcula tu muestra, <https://play.google.com/store/apps/details?id=muestreos.desarrollo.muestreosdev>

Figura 11.4. Muestreo aleatorio simple. Fuente: Fotografía: Asia Cecilia Carrasco Valenzuela e Iliana Tirado Olivas (Google, 2023).

Figura 11.5. Muestreo estratificado. Fuente: Fotografía: Asia Cecilia Carrasco Valenzuela e Iliana Tirado Olivas (Google, 2023).

Figura 11.6. Muestreo sistemático. Fuente: Fotografía: Asia Cecilia Carrasco Valenzuela e Iliana Tirado Olivas (Google, 2023).

Figura 11.7. Muestreo por conglomerados. Fuente: Fotografía: Asia Cecilia Carrasco Valenzuela e Iliana Tirado Olivas (Google, 2023).

Figura 13.1. Gráfico de puntos. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

Figura 13.2. Diagrama de cajas. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

Figura 13.3. Gráfico de barras. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

Figura 13.4. Gráfico de barras. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

Figura 14.1. Distribución normal de la estatura de estudiantes. Fuente: Fotografía: César Pilar Quintero (Google, 2023).

Figura 14.2. Gráfica distribución normal. Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2023).

Figura 14.3. Curva de la distribución normal $N(\mu, \sigma)$. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

Figura 14.3. Curvas de la distribución normal con medias iguales y desviación estándar diferentes. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

Figura 14.5. Curvas de la distribución normal con medias diferentes y desviación estándar iguales. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

Figura 14.6. Regla empírica en la distribución normal. Fuente: Elaboración propia (Excel, 2023).

Figura 14.7. Distribución normal con media 164.1 cm y desviación estándar 9.89 cm. Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2023).

Figura 14.8. Altura de una estudiante. Fuente: Fotografía: César Pilar Quintero (Androi, 2023).

Figura 14.9. Probabilidad de que un estudiante elegido al azar mida más de 175 cm. Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2023).

Figura 14.10. Aplicación GeoGebra. Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2023). Disponible en: <https://play.google.com/store/apps/details?id=muestreos.desarrollo.muestreosdev>

Figura 14.11. Aplicación Probability Distributions. Fuente: Elaboración propia. (Probability Distributions, 2023). Disponible en: <https://play.google.com/store/apps/details?id=kz.madiyar.probabilitydistributions>

Figura 14.12. Aplicación Probability Distributions. Fuente: Elaboración propia (Probability Distributions, 2023). <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.mbognar.probdist>

Figura 14.13. Aplicación Distribución normal. Fuente: Elaboración propia. (Distribución normal, 2023). Disponible en: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.randalldist.flutter.distribucion_normal

Figura 15.1. Peso de una manzana. Fuente: Fotografía: César Pilar Quintero (Androi, 2023).

Figura 15.2. Estatura de un estudiante. Fuente: Fotografía: César Pilar Quintero (Androi, 2023).

Figura 15.3. Estatura de una estudiante. Fuente: Fotografía: César Pilar Quintero (Androi, 2023).

Figura 15.4. Peso de una estudiante. Fuente: Fotografía: César Pilar Quintero (Androi, 2023).

Fotografías de portada y contraportada: Flavio Córdova.

Referencia a las fuentes de consulta de los códigos QR

- QR 4.1. Combinaciones y permutaciones. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 4.2. Calculadora de permutaciones. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 4.3. Calculadora de combinaciones. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 5.1. Probabilidad condicional: introducción. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 5.2. Calculadora de probabilidad condicional. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 5.3. Teorema de Bayes: introducción. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 6.1. Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares (ENIGH) 2022. Cuestionario de gastos del hogar. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 6.2. Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares (ENIGH) 2022. Cuestionario de gastos del hogar. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 7.1. Cómo crear gráficos en Canva. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 7.2. Cómo crear un gráfico de puntos. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 8.1. Calculadora de prueba de independencia de Chi-cuadrado. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 8.2. Prueba Chi-cuadrado. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 9.1. Comprueba el resultado en Demos. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 9.2. Correlación entre dos variables. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 9.3. Para profundizar sobre la Actividad de aprendizaje 9.2. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 9.4. Para profundizar sobre la Actividad de aprendizaje 9.3. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 9.5. Para profundizar sobre el coeficiente de correlación. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 9.6. Hoja de cálculo de Google Docs. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 9.7. Para profundizar sobre la Actividad de aprendizaje 9.4. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 9.8. Para profundizar sobre la Actividad de aprendizaje 9.4. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 14.1. Aplicación de celular para calcular la probabilidad mediante la distribución de probabilidad normal. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 14.2. Aplicación de celular para calcular la probabilidad mediante la distribución de probabilidad normal. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 15.1. Archivo complementario para la Actividad de aprendizaje 15.3. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>
- QR 15.2. Tabla de valores de probabilidad acumulada para la distribución normal estándar. Fuente: Parzibyte, 2023. Disponible en: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>

PENSAMIENTO MATEMÁTICO I

Se terminó de imprimir en junio de 2024 en los talleres gráficos
de SERVICIOS EDITORIALES ONCE RÍOS, S.A. DE C.V.,
Luis González Obregón S/N, Nuevo Bachigualato, C.P. 80135,
Tel. 667 712 2950, Culiacán, Sin., México

Esta obra consta de 23,000 ejemplares.